Beispiel Parabel durch 3 Punkte I (Aufstellen der Funktionsgleichung)

Aufstellen von Parabelgleichungen bei drei vorgegebenen Punkten.

Vorgehensweise:
1. Stellen Sie das Gleichungssystem auf.
2. Lösen Sie dieses mit Hilfe des Gauß Algorithmus.
3. Bestimmen Sie die Koeffizienten von f(x) durch einsetzen.
4. Schreiben Sie die Funktionsgleichung hin und machen Sie die Probe.
5. Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und den Scheitelpunkt.
6. Zeichnen Sie die Parabel in ein geeignetes Koordinatensystem.

Die allgemeine Form der Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 2. Grades lautet:
$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Werden die Koordinaten der 3 vorgegebenen Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung eingesetzt, so erhält man ein Gleichungssystem, bestehend aus 3 Gleichungen mit den drei Variablen a_2 ; a_1 und a_0

$P_1(2 \mid -1)$	$\Rightarrow f(2) = -1$	$\Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = -1$	$\Leftrightarrow$	$4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = -1$
$P_2\left(-1 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$	$\Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 = \frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow$	$1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{1}{2}$
$P_3(4 \mid 3)$	$\Rightarrow f(4) = 3$	$\Leftrightarrow a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 3$	$\Leftrightarrow$	$16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 3$

Lösung durch Additionsverfahren oder dem Gauß- Algorithmus.

a_0	a_1	a_2			
1	2	4	-1	$\mid \cdot 2$	Die Multiplikation jeder Zeile mit 2 bzw. -2 sorgt dafür, dass der
1	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\mid \cdot (-2)$	Bruch auf der rechten Seite verschwindet und die Zahlen in der
1	4	16	3	$\mid \cdot (-2)$	ersten Spalte bis auf ihre Vorzeichen gleich sind.
2	4	8	-2		Durch Addition der 1. Zeile zur 2. und 3. Zeile
-2	2	-2	-1	II + I	entstehen in der ersten Spalte 2 Nullen
-2	-8	-32	-6	III + I	
2	4	8	-2		Die Division der 2. Zeile durch 3 und Division der 3. Zeile durch 2
0	6	6	-3	$\mid : 3$	sorgt dafür, dass in der 2. Spalte für die 2. und 3. Zeile gleiche
0	-4	-24	-8	$\mid : 2$	Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen übereinander stehen
2	4	8	-2		Durch Addition der 2. Zeile zur 3. Zeile entsteht in der
0	2	2	-1		3. Zeile die 2. Null
0	-2	-12	-4	III + II	
2	4	8	-2		
0	2	2	-1		
0	0	-10	-5		

Berechnung der Koeffizienten:

$10a_2 = 5 \,|:10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$-2a_1 - 2a_2 = 1 \Leftrightarrow -2a_1 - 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \,|+1$

$\Leftrightarrow -2a_1 = 2 \,|:(-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -1}$

$1a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \Leftrightarrow a_0 + 2\cdot(-1) + 4\cdot\frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow a_0 - 2 + 2 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -1}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Probe:

$P_1(2\,|\,-1): f(2) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$

$P_2\left(-1\,\middle|\,\frac{1}{2}\right): f(-1) = \frac{1}{2}\cdot 1 + 1 - 1 = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2}$

$P_3(4\,|\,3): f(4) = \frac{1}{2}\cdot 16 - 4 - 1 = 8 - 4 - 1 = 3$

Berechnung der Achsenschnittpunkte.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \qquad f(0) = -1 \Rightarrow P_y(0\,|\,-1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0 \,|\cdot 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung

$p = -2; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$x_1 = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73 \Rightarrow P_{x_1}\left(1+\sqrt{3} \approx 2{,}73 \,|\, 0\right)$

$x_2 = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73 \Rightarrow P_{x_2}\left(1-\sqrt{3} \approx -0{,}73 \,|\, 0\right)$

Der Scheitelpunkt:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

$x_{sp} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = 1$

$y_{sp} = f(x_{sp}) = f(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1 - 1 = -\frac{3}{2}$

Scheitelpunkt: $P_{sp}\left(1\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right)$

Scheitelpunktform:

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$