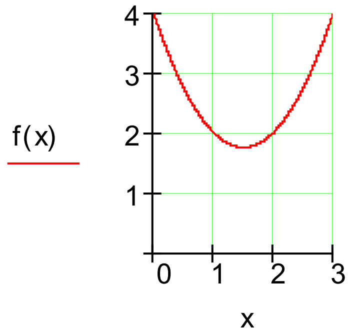
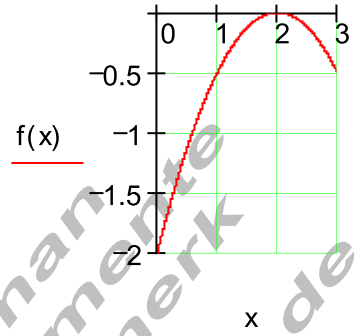
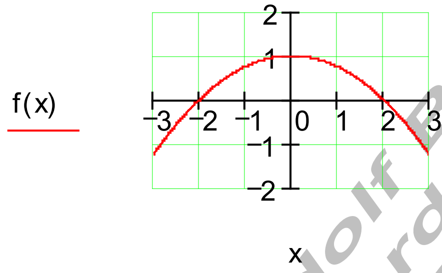
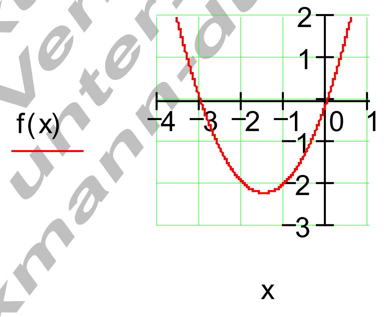
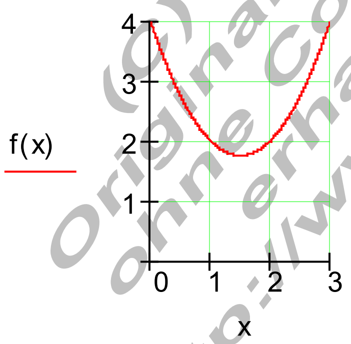
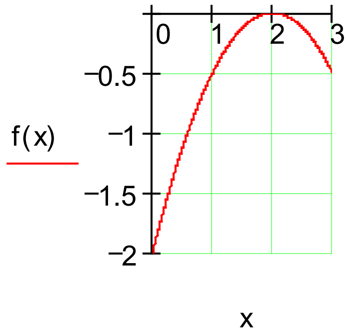
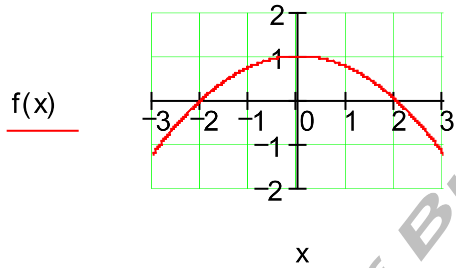
Lösungen Parabeln aus gegebenen Bedingungen II

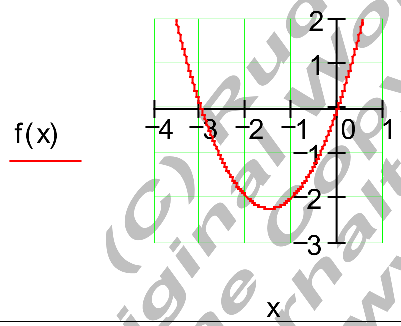
Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung aus der Abbildung.	
	a) 	b) 
	c) 	d) 

A1	**Ausführliche Lösung**	
	a) 	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $f(0) = 4 \Rightarrow a_0 = 4$ $f(1) = a_2 + a_1 + 4 = 2 \Leftrightarrow a_2 + a_1 = -2$ $f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 4 = 2 \Leftrightarrow 4a_2 + 2a_1 = -2$ $\Rightarrow a_2 = 1; a_1 = -3$ $\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^2 - 3x + 4}}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	b) 	Scheitel: $S(2\mid 0) \Rightarrow f(x) = a_2(x-2)^2$ $f(0) = -2 \Leftrightarrow 4a_2 = -2 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$ $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$ $= \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	c) 	$f(x) = a_2(x-2)(x+2)$ $= a_2(x^2-4)$ $f(0) = 1 \Leftrightarrow -4a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{4}$ $f(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}x^2 + 1}}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	d) 	$f(x) = a_2(x+3)x$ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow -2a_2 = -2 \Rightarrow a_2 = 1$ $f(x) = (x+3)x = \underline{\underline{x^2 + 3x}}$

A2	**Aufgabe**
	Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - bx + b$ schneidet die x – Achse in $x = -3$. Bestimmen Sie den Funktionsterm.

A2	**Ausführliche Lösung**
	$f(x) = 3x^2 - bx + b$ und $P_x(-3\mid 0)$ $\Rightarrow f(-3) = 0 \Leftrightarrow 27 + 3b + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{27}{4} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 3x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{27}{4}}}$

A3	**Aufgabe**
	Eine quadratische Funktion hat die Nullstellen –2 und 3 und hat den kleinsten Funktionswert –1. Bestimmen Sie f(x).

A3	**Ausführliche Lösung**
	$P_{x1}(-2\,\vert\,0)\,;P_{x2}(3\,\vert\,0) \Rightarrow x_s = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$
	kleinster Funktionswert $-1 \Rightarrow y_s = -1 \Rightarrow f(x) = a_2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 1$
	$f(3) = 0 \Leftrightarrow a_2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{25}$
	$\underline{\underline{f(x) = \frac{4}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{25}x - \frac{24}{25}}}$

A4	**Aufgabe**	
	Welche Aussagen lassen sich über die Koeffizienten a_1 und a_0 der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ machen?	
	a)	f(x) hat eine Nullstelle x = 0.
	b)	Die Nullstellen von f(x) unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

A4	**Ausführliche Lösungen**	
	a)	falls $f(0) = 0 \;\Rightarrow a_0 = 0$ und a_1 beliebig.
	b)	Wenn die Nullstellen sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, dann muss der Graph von f(x) achsensymmetrisch sein. Das bedeutet, die x - Koordinate des Scheitels ist Null. $f(x) = x^2 + a_0 \Rightarrow a_1 = 0$ und $a_0 < 0$, damit f(x) Nullstellen hat.

A5	**Aufgabe**	
	Für eine quadratische Funktion $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ gilt: $f(0) = 5$ und $f(1) = 2$.	
	a)	Welche Beziehung besteht zwischen a_2 und a_1?
	b)	Für welche Werte von a_2 und a_1 ist x = 3 Nullstelle?

A5	**Ausführliche Lösungen**	
	a)	$f(0) = 5 \Rightarrow \underline{\underline{a_0 = 5}}$ $f(1) = 2 \Leftrightarrow a_2 + a_1 + 5 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{a_2 + a_1 = -3}}$ oder $a_1 = -3 - a_2$
	b)	$f(x) = a_2x^2 + \underbrace{(-3-a_2)}_{a_1}x + 5$ $f(3) = 0 \Leftrightarrow 9a_2 + (-3-a_2)\cdot 3 + 5 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_2 = \frac{2}{3}}}$ und mit $a_1 = -3 - a_2$ folgt: ; $a_1 = -3 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{-\frac{11}{3}}}$

A6	**Aufgabe**	
	Parabeln aus gegebenen Bedingungen.	
	a)	Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel mit der Gleichung $f(x) = x^2 - 1{,}5x + 2$ keinen Schnittpunkt mit der x – Achse besitzt.
	b)	Für welche Werte von a_2 (ungleich Null) hat die Parabel mit der Gleichung $f(x) = a_2x^2 - 1{,}5x + 2$ einen, keinen oder zwei Schnittpunkt(e) mit der x – Achse?

A6	**Ausführliche Lösung**
a)	$f(x) = x^2 - 1{,}5x + 2$ Keine Nullstelle bedeutet $D < 0$ $x^2 - 1{,}5x + 2 = 0 \Rightarrow p = -\frac{3}{2};\, q = 2$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2 = \frac{9}{16} - \frac{32}{16} < 0$ Bedingung $D < 0$ erfüllt.

A6	**Ausführliche Lösung**
b)	$f(x) = ax^2 - \frac{3}{2}x + 2$ aus $f(x) = 0$ folgt: $ax^2 - \frac{3}{2}x + 2 = 0 \mid :a \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2a}x + \frac{2}{a} = 0$ $\Rightarrow p = -\frac{3}{2a};\, q = \frac{2}{a} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{3}{4a}\right)^2 - \frac{2}{a} = \frac{9}{16a^2} - \frac{2}{a}$ eine Nullstelle: $D = 0$ $\Rightarrow \frac{9}{16a^2} - \frac{2}{a} = 0 \mid \cdot a^2 \Leftrightarrow \frac{9}{16} - 2a = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{16} = 2a \mid :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{9}{32} = a}}$ keine Nullstelle: $D < 0$ $\Rightarrow \frac{9}{16a^2} - \frac{2}{a} < 0 \mid \cdot a^2 \Leftrightarrow \frac{9}{16} - 2a < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{16} < 2a \mid :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{9}{32} < a}}$ zwei Nullstellen: $D > 0$ $\Rightarrow \frac{9}{16a^2} - \frac{2}{a} > 0 \mid \cdot a^2 \Leftrightarrow \frac{9}{16} - 2a > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{16} > 2a \mid :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{9}{32} > a}}$

A7 Aufgabe

Welche Bedingungen müssen für die Koeffizienten der Funktion $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ erfüllt sein, damit f(x) keine Nullstellen besitzt?

A7 Ausführliche Lösung

$f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ Bedingung für keine Nullstelle: $D < 0$

$$p = a_1\,;\, q = a_0 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = \frac{a_1^2}{4} - a_0$$

$$D < 0 \Leftrightarrow \frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{a_1^2}{4} < a_0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{a_1^2 < 4a_0}}$$

A8 Aufgabe

Bestimmen Sie den größten bzw. kleinsten Wert der Funktion f(x).

a) $f(x) = (x-2)^2 - 2x - 2$

b) $f(x) = -0{,}5x^2 + 0{,}5x - 6$

A8 Ausführliche Lösungen

a)

$$f(x) = (x-2)^2 - 2x - 2$$

$$= x^2 - 6x + 2$$

Parabel nach oben geöffnet, Scheitel ist Minimum.

$$f(x) = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2$$

$$= (x-3)^2 - 7$$

$$\Rightarrow S(3 \mid -7)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(3) = -7 \text{ ist der kleinste Wert}}}$$

b)

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 0{,}5x - 6$$

Parabel ist nach unten geöffnet, Scheitel ist Maximum.

$$f(x) = -0{,}5\left[x^2 - x + 12\right]$$

$$= -0{,}5\left[x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\right]$$

$$= -0{,}5\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{47}{4}\right]$$

$$= -0{,}5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{47}{8}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{47}{8}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{47}{8} \text{ ist der größte Wert.}}}$$