Lösungen Grundlagen quadratische Funktionen IV

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**
	Gegeben ist die Funktion f(x). Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Graph der Funktion die x – Achse berührt. Zeichnen Sie den Graphen. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8} \quad x\in\mathbb{R}$

A1 Ausführliche Lösung

Wenn der Graph einer Parabel die x- Achse berührt, kann das nur deren Scheitelpunkt sein. In diesem Fall ist der Scheitelpunkt eine doppelte Nullstelle.

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}$$

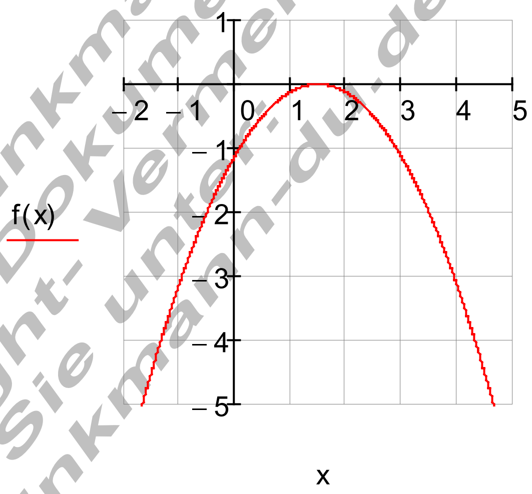
$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}=0 \mid \cdot(-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}=0 \Rightarrow p=-3\,;\,q=\frac{9}{4}$$

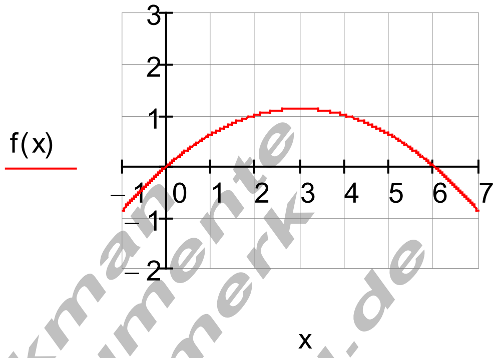
$$\Rightarrow D=0 \text{ Berührungspunkt} = \text{Scheitel}$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1/2}\left(\frac{3}{2}\middle|0\right)}}$$

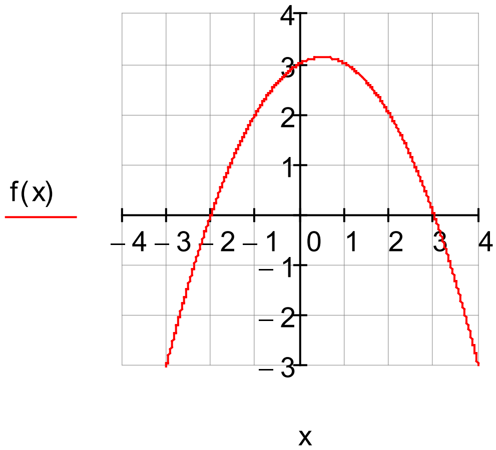
$$\text{Scheitelpunkt}: \underline{\underline{S\left(\frac{3}{2}\middle|0\right)}}$$



A2a	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie von der Funktionsgleichung f(x) die Achsenschnittpunkte, und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$

A2	**Ausführliche Lösung**		
	a)	$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\|0)}}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{4}\right) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(0\|0)}}$ $-\frac{1}{8}x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}(6\|0)}}$ $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$ $y_s = f(x_s) = f(3) = \frac{9}{8} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(3\|\frac{9}{8}\right)}}$	 Hat eine Parabel zwei Nullstellen, dann liegt die x- Koordinate vom Scheitelpunkt genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen und lässt sich leicht berechnen.

A2b	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie von der Funktionsgleichung f(x) die Achsenschnittpunkte, und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$

A2	**Ausführliche Lösung**		
	b)	$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ $f(0) = -\frac{1}{2}(-3)(2) = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\|3)}}$ $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3\,;\, x_2 = -2$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3\|0)\,;\,P_{x2}(-2\|0)}}$ $x_s = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}\,;\, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{8}$ $\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2}\|\frac{25}{8}\right)}}$	

A2c	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie von der Funktionsgleichung f(x) die Achsenschnittpunkte, und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = x^2 + 4x + 1$

A2 Ausführliche Lösung

c)

$f(x) = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,1)}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow p = 4\,;\, q = 1 \Rightarrow D = 3$

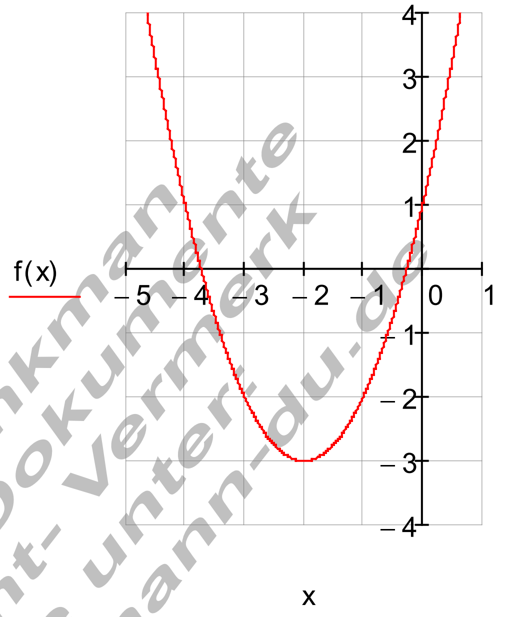
$x_1 = -2 + \sqrt{3}\,;\, x_1 = -2 - \sqrt{3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(-2+\sqrt{3}\,|\,0\right); P_{x2}\left(-2-\sqrt{3}\,|\,0\right)}}$

$x_s = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

$= \dfrac{-2+\sqrt{3}+\left(-2+\sqrt{3}\right)}{2} = -2$

$y_s = f(x_s) = f(-2) = -3 \Rightarrow \underline{\underline{S(-2\,|\,-3)}}$



A2d	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie von der Funktionsgleichung f(x) die Achsenschnittpunkte, und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = -0{,}25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$

A2 Ausführliche Lösung

d)

$f(x) = -0{,}25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$

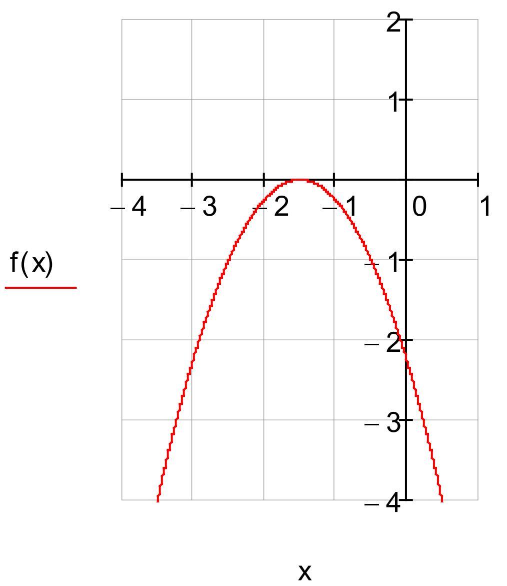
$= -x^2 - 3x - \dfrac{9}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,-\dfrac{9}{4}\right)}}$

$f(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1/2}\left(-\dfrac{3}{2}\,|\,0\right)}}$

Da $P_{x1/2}$ Berührungspunkt:

$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\dfrac{3}{2}\,|\,0\right)}}$

Doppelte Nullstelle bei einer Parabel bedeutet, der Graph berührt an dieser Stelle die x-Achse. Die Parabel hat dort ihren Scheitelpunkt.



A2e	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie von der Funktionsgleichung f(x) die Achsenschnittpunkte, und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = 3x(1-x)$

A2 Ausführliche Lösung

e)

$f(x) = 3x(1-x)$

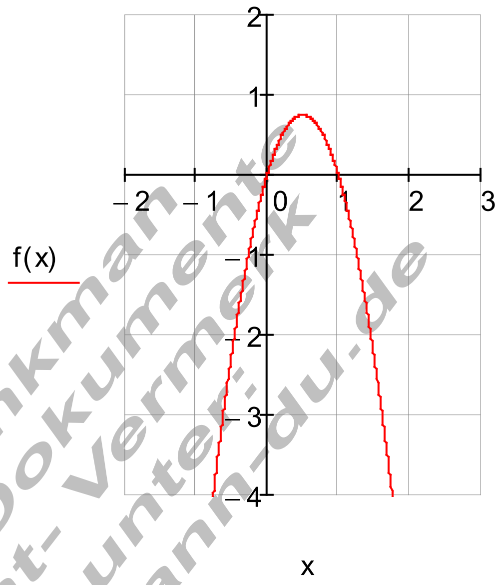
$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(1-x) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0\,;\,(1-x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(0\,|\,0)\,;\,P_{x2}(1\,|\,0)}}$

$x_s = \frac{1}{2}\,;\,y_s = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2}\,|\,\frac{3}{4}\right)}}$



A2f	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie von der Funktionsgleichung f(x) die Achsenschnittpunkte, und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$

A2 Ausführliche Lösung

f)

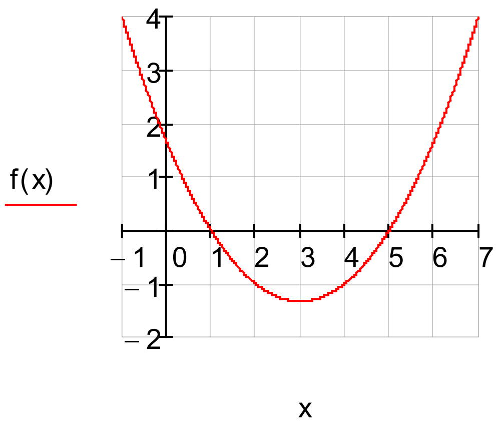
$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,\frac{5}{3}\right)}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3} = 0\,|\cdot 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\, x_2 = 5$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(1\,|\,0)\,;\,P_{x2}(5\,|\,0)}}$

$\underline{\underline{S\left(3\,|\,-\frac{4}{3}\right)}}$



A3	**Aufgabe**
	Welches Rechteck mit dem Umfang U = 18 cm hat den größten Flächeninhalt?

A3 Ausführliche Lösung

Umfang eines Rechtecks: $U = 2a + 2b$

Rechteckfläche: $A = a \cdot b$

Ansatz: $U = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{U}{2} - a$ in die Flächenformel einsetzen:

$A(a) = a\left(\frac{U}{2} - a\right) = \frac{U}{2}a - a^2 = -a^2 + \frac{U}{2}a$ Parabel nach unten geöffnet

Die Scheitelkoordinaten liefern das Maximum für die Fläche

$A(a) = -1\left[a^2 - \frac{U}{2}a + \left(\frac{U}{4}\right)^2 - \left(\frac{U}{4}\right)^2\right] = -\left(a - \frac{U}{4}\right)^2 + \left(\frac{U}{4}\right)^2$ Scheitelpunktform

$\Rightarrow S\left(\frac{U}{4} \mid \left(\frac{U}{4}\right)^2\right) \Rightarrow$ für $a = \frac{U}{4}$ ist $A(a) = \left(\frac{U}{4}\right)^2$ das Flächenmaximum

Für $U = 18\text{ cm}$ gilt: $a = \frac{18\text{ cm}}{4} = 4{,}5\text{ cm}$ und $b = \frac{U}{2} - a = 9\text{ cm} - 4{,}5\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$

Für $\underline{\underline{a = 4{,}5\text{ cm}}}$ und $\underline{\underline{b = 4{,}5\text{ cm}}}$ hat das Rechteck den größten Flächeninhalt

$A = a \cdot b = 4{,}5\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} = \underline{\underline{20{,}25\text{ cm}^2}}$ Das ist zufällig ein Quadrat.

Bitte mit $U = 30\text{ cm}$ überprüfen!

Die Flächenformel stellt eine nach unten geöffnete Parabel dar. Bei einer nach unten geöffneten Parabel hat der Scheitelpunkt den größten Wert. Das Ergebnis zeigt, dass bei vorgegebenen Umfang ein Quadrat den größten Flächeninhalt hat.

A4 Aufgabe

Wo schneiden die Graphen der Funktionen f(x) und g(x) die x – Achse? Wo liegt der Scheitel? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Graphen? Beantworten Sie die Fragen mit Hilfe der Wertetabelle.

a)

x	−3	−2	−1	0	1	2
f(x)	−3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	−3,5
g(x)	4	0	−2	−2	0	4

b)

x	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−12	−5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	−2,5	−4	−4,5	−4

A4 Ausführliche Lösungen

a) f(x):

Nullstellen:

$-3 < x_1 < -2$ und

$1 < x_2 < 2$ Symmetrie

Parabel ist nach unten geöffnet

$x_s = -0,5$ wegen Symmetrie

g(x):

$P_{x1}(-2\,|\,0);P_{x2}(1\,|\,0)$

Aus der Wertetabelle abgelesen

Parabel ist nach oben geöffnet

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+1}{2} = -0,5$$

f(x) und g(x) sind symmetrisch zu $x = -0,5$

b) f(x): Scheitel $S(2\,|\,4)$

$\Rightarrow f(x) = a_2(x-2)^2 + 4$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$

$\Rightarrow f(x) = -(x-2)^2 + 4$

Nullstellen:

$(x-2)^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 0\,;\,x_2 = 4$

Parabel ist nach unten geöffnet

g(x): Scheitel $S(2\,|\,-4,5)$

$\Rightarrow g(x) = a_2(x-2)^2 - 4,5$

$g(1) = -4 \Rightarrow a_2 = 0,5$

$\Rightarrow g(x) = 0,5(x-2)^2 - 4,5$

Parabel ist nach oben geöffnet

Nullstellen:

$0,5(x-2)^2 = 4,5 \Rightarrow x_1 = 5\,;\,x_2 = -1$

f(x) und g(x) sind symmetrisch zu $x = 2$

A5 Aufgabe

Welche Eigenschaften der zugehörigen Graphen lassen sich unmittelbar aus den Funktionsgleichungen ablesen?

$$f(x) = -x^2 - x + 6\,;\quad g(x) = (2-x)(x+3)\,;\quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

A5 Ausführliche Lösung

$f(x) = -x^2 - x + 6$ Form einer Normalparabel nach unten geöffnet $P_y(0\,|\,6)$

$g(x) = (2-x)(x+3)$

Form einer Normalparabel nach unten geöffnet $P_{x1}(-3\,|\,0);P_{x2}(2\,|\,0)$

$$h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{25}{4}\right)$$

Form einer Normalparabel nach unten geöffnet