Lösungen Grundlagen quadratische Funktionen III

Ausführliche Lösungen:

A1a	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-2$

A1a Achsenschnittpunkte

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-2)}}$$

Nullstellen: Bedingung $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-2=0\;|\cdot 3$

$$\Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow p=-1;\; q=-6$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-6=\frac{25}{4}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}}=3;\; x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}}=-2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3\,|\,0);\,P_{x2}(-2\,|\,0)}}$$

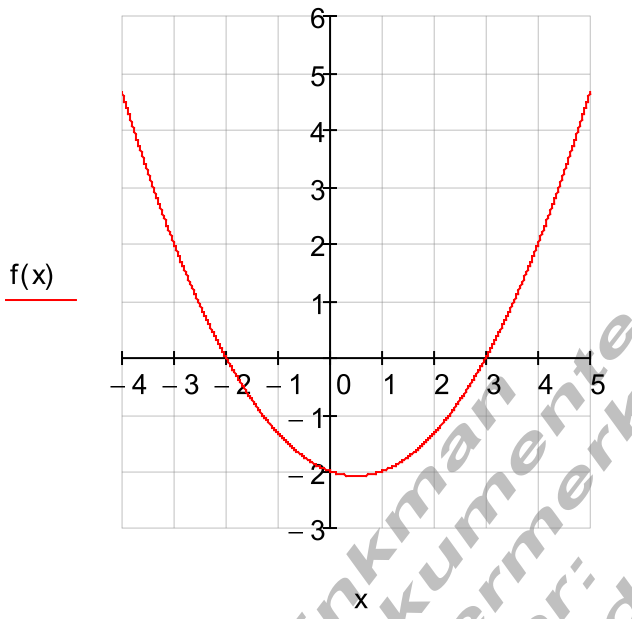
A1a Scheitelpunkt

x – Koordinate des Scheitels: $x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+(-2)}{2}=\frac{1}{2}$

y – Koordinate des Scheitels: $y_s=f(x_s)$

$$y_s=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-2=-\frac{25}{12}\approx-2{,}08 \Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,-\frac{25}{12}\right)}}$$

A1a	Der Graph



A1b	**Aufgabe**
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen. $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 4$

A1b Achsenschnittpunkte

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-4)}}$$

Nullstellen: Bedingung $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 4x - 4 = 0 \,|\cdot(-2)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow p = -8\,;\, q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-4)^2 - 8 = 8$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow x_1 = 4 + \sqrt{8} \approx 6{,}83\,;\, x_2 = 4 - \sqrt{8} \approx 1{,}17$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(4 + \sqrt{8} \approx 6{,}83\,|\,0\right); P_{x2}\left(4 - \sqrt{8} \approx 1{,}17\,|\,0\right)}}$$

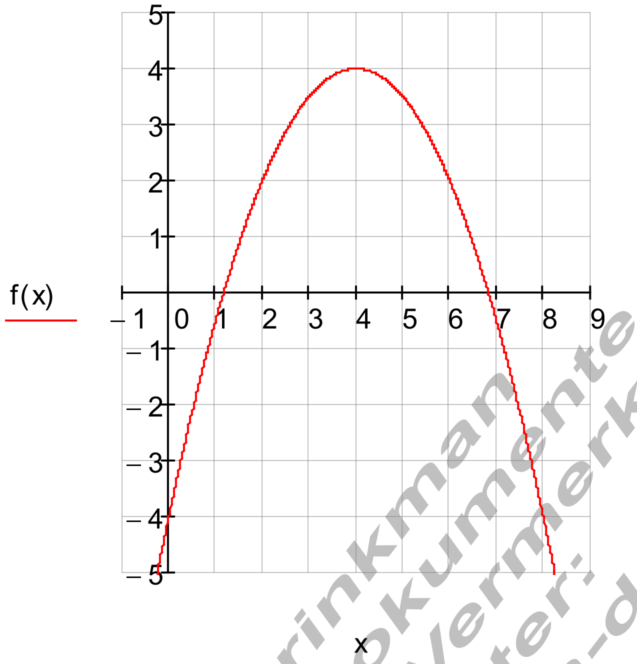
A1b Scheitelpunkt

$$x-\text{Koordinate des Scheitels: } x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4 + \sqrt{8} + 4 - \sqrt{8}}{2} = 4$$

$$y-\text{Koordinate des Scheitels: } y_s = f(x_s)$$

$$y_s = f(4) = -\frac{4^2}{2} + 4\cdot 4 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{S(4\,|\,4)}}$$

A1b	Der Graph



A1c	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=(x-1)^2-2$

A1c Achsenschnittpunkte

$$f(x)=(x-1)^2-2=x^2-2x-1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-1)}}$$

Nullstellen: Bedingung $f(x)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-2\,|+2 \Leftrightarrow (x-1)^2=2\,|\sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{2}$$

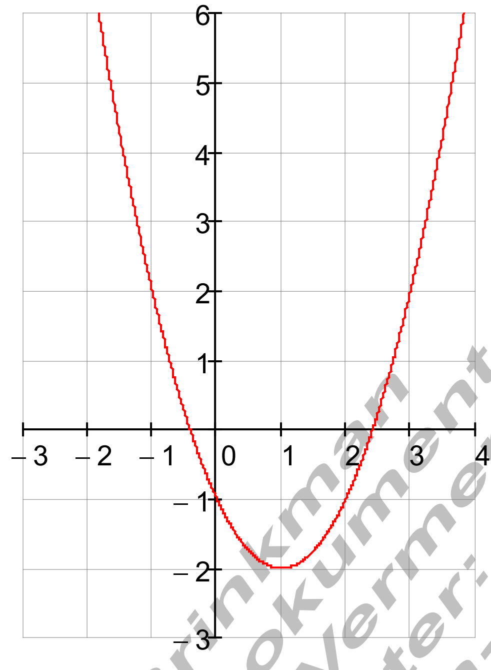
$$\Rightarrow x-1=\sqrt{2} \Rightarrow x_1=1+\sqrt{2}$$

$$x-1=-\sqrt{2} \Rightarrow x_2=1-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(1+\sqrt{2}\,|\,0\right);P_{x2}\left(1-\sqrt{2}\,|\,0\right)}}$$

A1c Scheitelpunkt

$$f(x)=(x-1)^2-2 \Rightarrow \underline{\underline{S(1\,|-2)}}$$

A1c	Der Graph
	

A1d	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{5}{4}$

A1d Achsenschnittpunkte

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{5}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \middle| -\frac{5}{4}\right)}}$$

Nullstellen: Bedingung $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{5}{4} = 0 \,|\cdot(-5)$

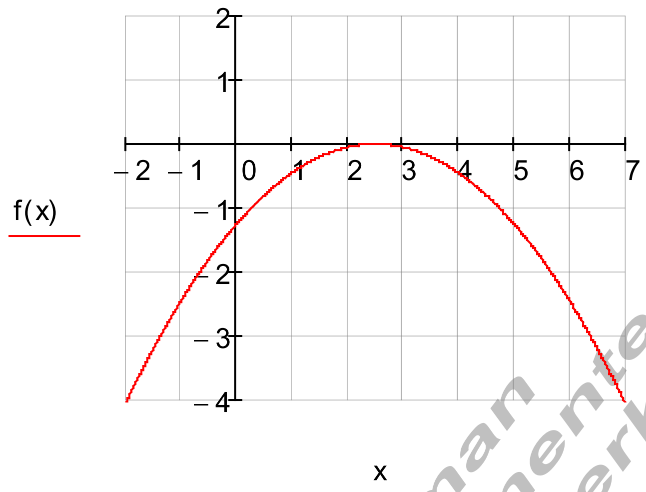
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow p = -5\,;\, q = \frac{25}{4} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1/2}\left(\frac{5}{2} \,|\, 0\right)}}$$ Berührungspunkt

A1d Scheitelpunkt

Der Berührungspunkt ist Scheitelpunkt $\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{5}{2} \middle| 0\right)}}$

A1d	Der Graph



A1e	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{2}(x-3)(x+4)$

A1e Achsenschnittpunkte

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-3)(x+4)$$

Bedingung für P_y : $f(0) \Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}(-3)(4)=-6 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|-6)}}$

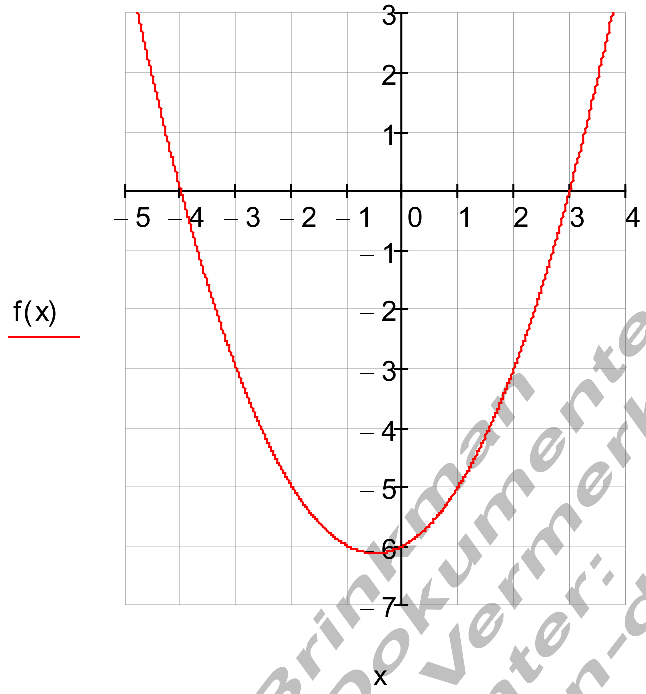
Nullstellen: Bedingung $f(x)=0 \Rightarrow x_1=3\,;\,x_2=-4$ Satz vom Nullprodukt

$\underline{\underline{P_{x1}(3\,|\,0)\,;P_{x2}(-4\,|\,0)}}$

A1e Scheitelpunkt

$$x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$y_s=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-3\right)\left(-\frac{1}{2}+4\right)=-\frac{49}{8} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{1}{2}\,|-\frac{49}{8}\right)}}$$

A1e	Der Graph
	

A1f	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{5}{6}x^2-3x$

A1f Achsenschnittpunkte

$$f(x)=\frac{5}{6}x^2-3x \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$$

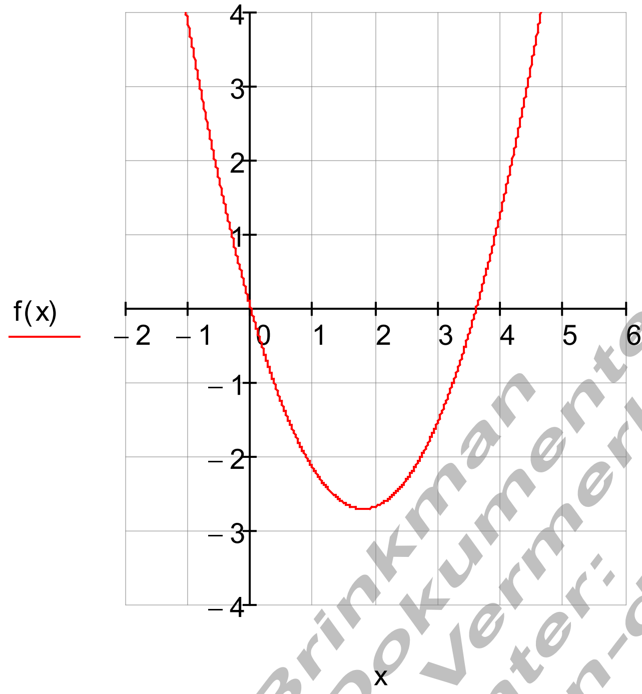
$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{6}x^2-3x=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{5}{6}x-3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\left(\frac{5}{6}x-3\right)=0 \Rightarrow x_2=\frac{18}{5}=3{,}6 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(0\,|\,0);P_{x2}\left(\frac{18}{5}\,\middle|\,0\right)}}$$

A1f Scheitelpunkt

$$x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+\frac{18}{5}}{2}=\frac{9}{5}$$

$$y_s=f\left(\frac{9}{5}\right)=-\frac{27}{10}=-2{,}7 \Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{9}{5}\,\middle|\,-\frac{27}{10}\right)}}$$

A1f	Der Graph
	

A1g	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=2x^2+x-1$

A1g Achsenschnittpunkte

$$f(x)=2x^2+x-1 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-1)}}$$

Nullstellen: Bedingung $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\;|:2$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2};\; q=-\frac{1}{2} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

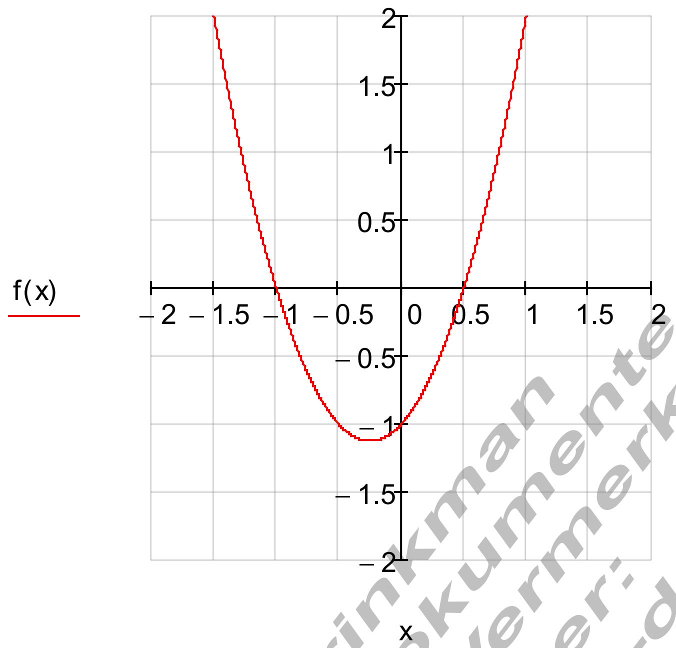
$$\Rightarrow x_1=-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{1}{2};\; x_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{9}{16}}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(\frac{1}{2}\,|\,0\right);P_{x2}(-1\,|\,0)}}$$

A1g Scheitelpunkt

$$x-\text{Koordinate des Scheitels: } x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{1}{2}-1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$y-\text{Koordinate des Scheitels: } y_s=f(x_s)$$

$$y_s=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{8} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{1}{4}\,|\,-\frac{9}{8}\right)}}$$

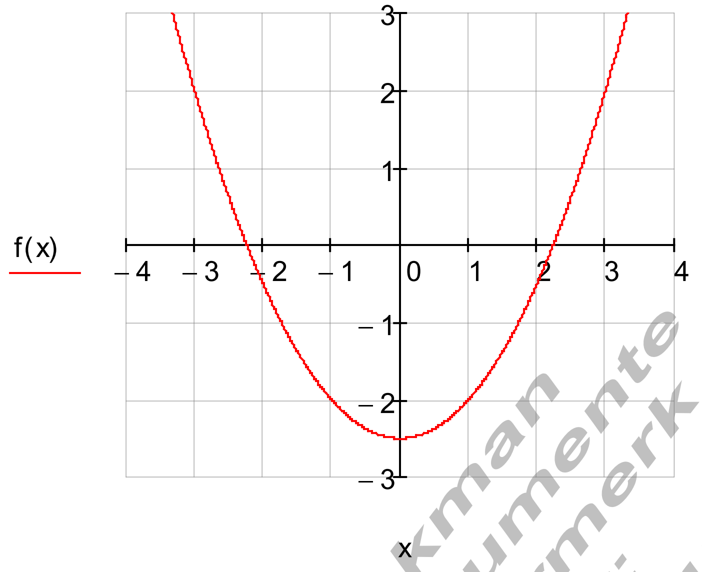
A1g	Der Graph
	

A1h	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = 0,5\left(x^2 - 5\right)$

A1h	Achsenschnittpunkte
	$f(x) = 0,5\left(x^2 - 5\right) = 0,5x^2 - 2,5 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid -2,5)}}$ Nullstellen: Bedingung $f(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^2 - 2,5 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \mid \sqrt{} \Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = \sqrt{5}\,;\, x_2 = -\sqrt{5}$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(\sqrt{5} \mid 0\right); P_{x2}\left(-\sqrt{5} \mid 0\right)}}$

A1h	Scheitelpunkt
	$x_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2} = 0 \Rightarrow y_s = f(0) = -2,5 \Rightarrow \underline{\underline{S(0 \mid -2,5)}}$

A1h Der Graph



A1i **Aufgabe**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = -0,25x^2 - x - 1$

A1i Achsenschnittpunkte

$f(x) = -0,25x^2 - x - 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid -1)}}$

Nullstellen: Bedingung $f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,25x^2 - x - 1 = 0 \mid \cdot (-4)$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow p = 4\,;\, q = 4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 2^2 - 4 = 0$

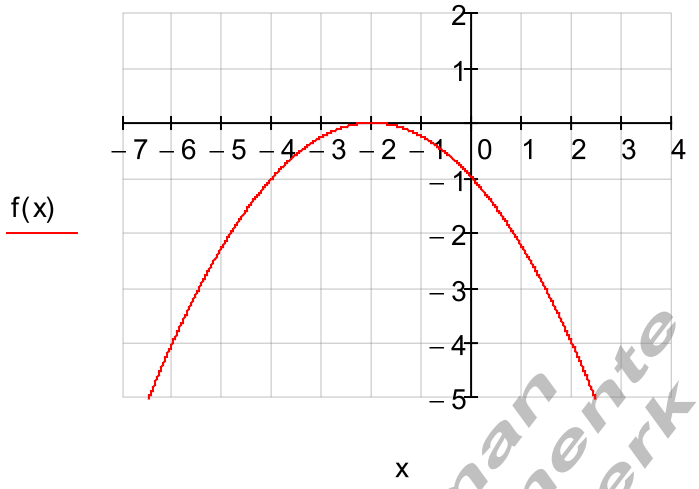
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$\Rightarrow x_{1/2} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1/2}(-2 \mid 0)}}$ Berührungspunkt

A1i Scheitelpunkt

Der Berührungspunkt ist Scheitelpunkt $\Rightarrow \underline{\underline{S(-2 \mid 0)}}$

A1i Der Graph



A2 **Aufgabe**

Erläutern Sie ein Verfahren zur Bestimmung der Scheitelkoordinaten.
Verwenden Sie die Funktionsgleichung $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$

A2 **Ausführliche Lösung**

$f(x) = 2x^2 - 4x + 4$

1. Formfaktor ausklammern: $f(x) = 2\left[x^2 - 2x + 2\right]$

2. quadratische Ergänzung: $f(x) = 2\left[\underbrace{x^2 - 2x + 1^2}_{\text{2. binomische Formel}} - 1^2 + 2\right]$

$$f(x) = 2\left[(x-1)^2 + 1\right]$$

3. ausmultiplizieren: $\underline{\underline{f(x) = 2(x-1)^2 + 2}}$ (Scheitelpunktform)

4. Scheitelpunktkoordinaten ablesen: $\underline{\underline{S(1|2)}}$

A3 **Aufgabe**

Gegeben ist eine Wertetabelle für eine quadratische Funktion f(x). Machen Sie Aussagen über den Graphen von f(x). Scheitelpunkt, Symmetrieachse, Öffnung. Für welche x – Werte fallen die Funktionswerte?

a)

x	−1	0	1	2	3
f(x)	5,5	3	1,5	1	1,5

b)

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	−3	−1,5	−1	−1,5	−3

A3 Ausführliche Lösung

a)

Ansatz: $f(x) = a_2(x-2)^2 + 1$

$P(1|1{,}5): f(1) = a_2(-1)^2 + 1 = 1{,}5$

$\Rightarrow a_2 + 1 = 1{,}5 \Leftrightarrow a_2 = 0{,}5$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 0{,}5(x-2)^2 + 1}}$

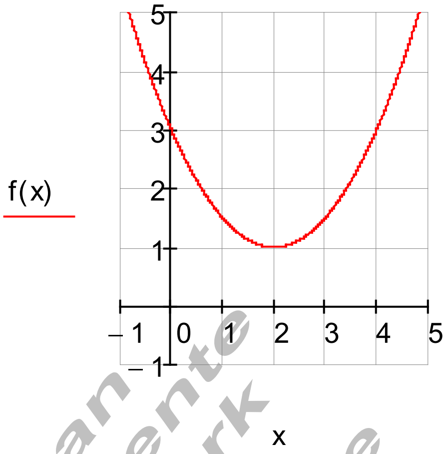
$P(-1|5{,}5): f(-1) = 0{,}5 \cdot 9 + 1 = 5{,}5\ (w)$

Scheitelpunkt: $S(2|1)$

Symmetrieachse: $x = 2$

Wegen $a_2 = 0{,}5 > 0$ Öffnung nach oben

Funktionswerte fallen für $x < 2$



Bemerkung:
Aus der Wertetabelle kann man die Scheitelpunktkoordinaten S (2 | 1) ablesen.
Das liefert den Ansatz.

A3 Ausführliche Lösung

b)

Ansatz: $f(x) = a_2x^2 - 1$

$P(1|-1{,}5): f(1) = a_2 1^2 - 1 = -1{,}5$

$\Rightarrow a_2 = -1{,}5 + 1 = -0{,}5$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -0{,}5x^2 - 1}}$

$P(2|-3): f(2) = -0{,}5 \cdot 4 - 1 = -3\ (w)$

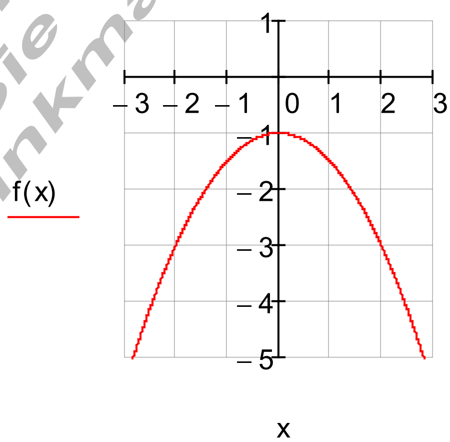
Scheitelpunkt: $S(0|-1)$

Symmetrieachse: $x = 0$

Wegen $a_2 = -0{,}5 < 0$

Öffnung nach unten

Funktionswerte fallen für $x > 0$



Bemerkung:
Aus der Wertetabelle kann man die Scheitelpunktkoordinaten S (0 | -1) ablesen.
Das liefert den Ansatz.

A4 Aufgabe

Gegeben sind zwei ganzrationale Funktionen 2. Grades durch ihre Wertetabellen. Welche Eigenschaften der Graphen von f(x) und g(x) lassen sich ablesen? Wie unterscheiden sich die beiden Parabeln?

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2
f(x)	–6	–1	2	3	2	–1	–6
g(x)	–3,5	–1	0,5	1	0,5	–1	–3,5

A4 **Ausführliche Lösung**

$S(-1|3): f(x) = a_{2f}(x+1)^2 + 3$

$P(2|-6): f(2) = a_{2f} \cdot 9 + 3 = -6$

$\Leftrightarrow a_{2f} = -1$

$\Rightarrow f(x) = -(x+1)^2 + 3$

Öffnung nach unten

$S(-1|1): g(x) = a_{2g}(x+1)^2 +$

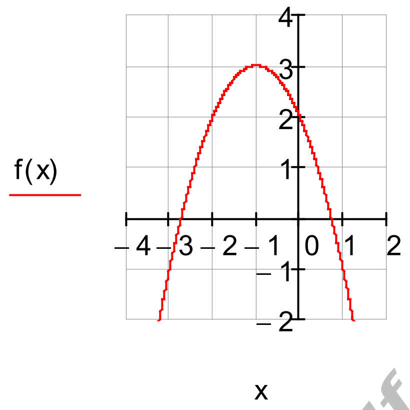
$P(1|-1): g(1) = a_{2g} \cdot 4 + 1 = -1$

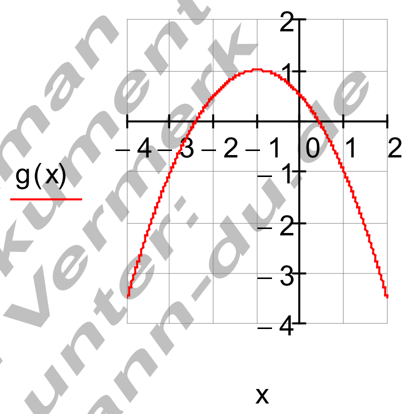
$\Leftrightarrow a_{2g} = -0{,}5$

$\Rightarrow g(x) = -0{,}5(x+1)^2 + 1$

Öffnung nach unten

Unterschiedliche Formfaktoren und Lage der Scheitelpunkte



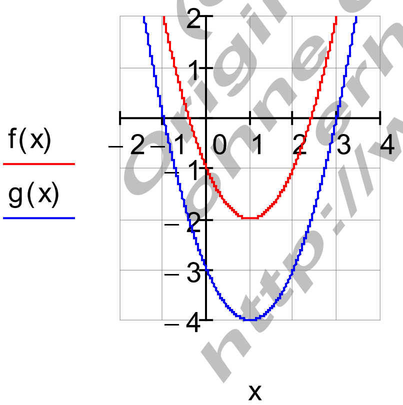


A5 **Aufgabe**

Eine Parabel wird in y – Richtung verschoben bzw. gestreckt.
Welche Eigenschaften der Parabel bleiben erhalten, welche ändern sich?

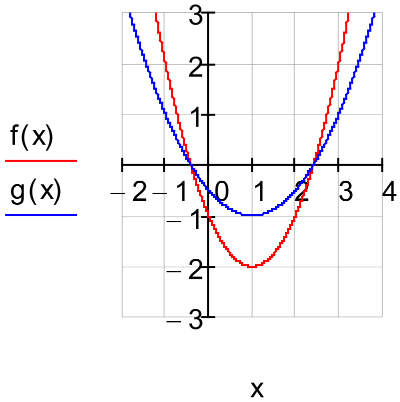
A5 **Ausführliche Lösung**

$f(x) = x^2 - 2x - 1;\ g(x) = f(x) - 2$



<u>Verschiebung in y- Richtung:</u>
Die Form bleibt erhalten, der y- Wert des Scheitels ändert sich.
Die Achsenschnittpunkte ändern sich.

$f(x) = x^2 - 2x - 1;\ g(x) = 0{,}5 \cdot f(x)$



<u>Streckung in y- Richtung:</u>
Schnittpunkte mit der x- Achse bleiben unverändert. Die Form und der y- Wert des Scheitelpunktes ändert sich. Schnittpunkt mit der y- Achse ändert sich.

A6	**Aufgabe**	
	Eine quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$	
	a)	Zeigen Sie dass der Graph von f(x) symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung x = 2 ist.
	b)	Der Graph wird um zwei Einheiten nach links geschoben. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung g(x) der verschobenen Parabel.

A6 Ausführliche Lösungen

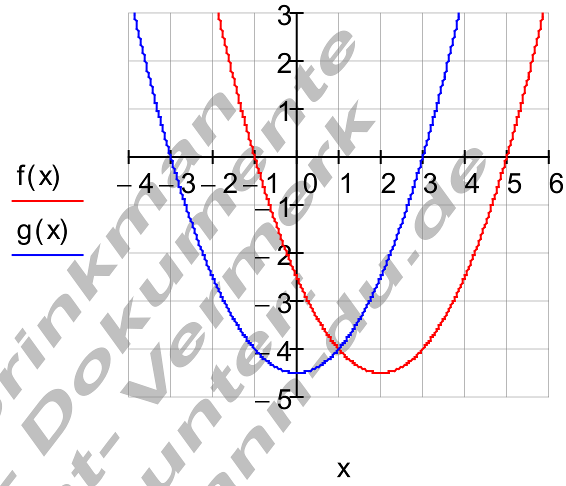
a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$

Symmetrisch zur Geraden mit x = 2 bedeutet, die x – Koordinate des Scheitelpunktes muss 2 sein.

$$f(x) = 0{,}5\left[x^2 - 4x - 5\right]$$

$$= 0{,}5\left[x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 - 5\right]$$

$$= 0{,}5(x-2)^2 - 4{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{S(2\,|\,-4{,}5)}}$$



b) Verschiebung um 2 Einheiten nach links:

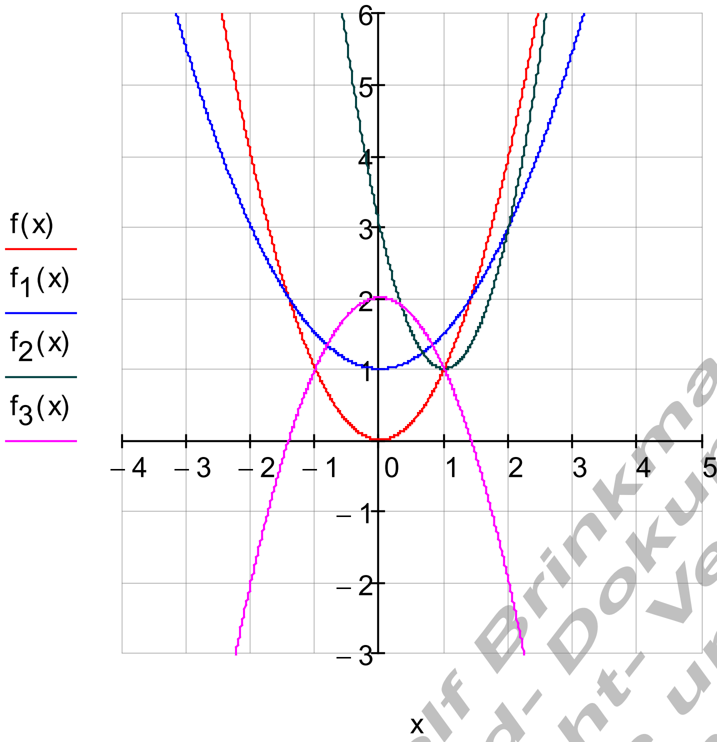
$$g(x) = 0{,}5(x - 2 + 2)^2 - 4{,}5$$

$$= \underline{\underline{0{,}5x^2 - 4{,}5}}$$

A7	**Aufgabe**
	Jede Parabel lässt sich durch Verschiebung und Streckung aus der Normalparabel gewinnen. Zeichnen Sie folgende Graphen in ein Koordinatensystem und beschreiben Sie, welche Verschiebungen und Streckungen Sie dabei feststellen.
	$f(x) = x^2$ $f_1(x) = 0{,}25x^2 + 1$ $f_2(x) = 2(x-1)^2 + 1$ $f_3(x) = 2 - x^2$

A7	**Ausführliche Lösung**

$f(x)=x^2 \qquad f_1(x)=0{,}25x^2+1 \qquad f_2(x)=2(x-1)^2+1 \qquad f_3(x)=2-x^2$



f_1 (x): Streckung in y- Richtung um den Faktor 0,25 und Verschiebung in y- Richtung um 1 LE.

f_2 (x): Streckung in y- Richtung um den Faktor 2 und Verschiebung um 1 LE nach rechts und 1 LE nach oben.

f_3 (x): Spiegelung an der x- Achse und Verschiebung um 2 LE nach oben.

A8	**Aufgabe**

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Funktionen.

$f(x)=0{,}5x^2-6x+3\;;\;x\in\mathbb{R}$ und $g(x)=0{,}5x(x-12)\;;\;x\in\mathbb{R}$.

A8	**Ausführliche Lösung**

$f(x)=0{,}5x^2-6x+3$

$g(x)=0{,}5x(x-12)=0{,}5x^2-6x$

oder

$g(x)=f(x)-3=0{,}5x^2-6x$

g(x) entsteht aus f(x) durch eine Verschiebung um 3 LE nach unten.