Abiturvorbereitung

Vireninfektion, zusammengesetzte Funktion mit e- Funktion
Aufgabenblatt

Aufgabe 7

7.	Bei einer Virusinfektion erfolgt die Virenvermehrung nach der Funktion $f(x) = e^x - 1$ Wobei x die Anzahl der Tage ist. Nach t Tagen wird ein Medikament verabreicht, dass die Virenkonzentration nach der Funktion $g(x) = f(t) \cdot e^{-(x-t)}$ verringert.	
	a)	Stellen Sie diesen Sachverhalt für t = 4 Tage grafisch dar.
	b)	Die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse ist ein Maß für die schädigende Wirkung der Vieren, auch Wirkungsfaktor genannt. Gesundheitliche Schäden können auftreten, wenn der Wert 200 WE (Wirkungseinheiten) überschreitet. Berechnen Sie den gesamten Wirkungsfaktor bis zum völligen Absterben aller Vieren.
	c)	Welche Folgen hat es, wenn das Medikament erst nach t = 5 Tagen verabreicht wird?

E7	**Ergebnisse**	
	a)	Siehe ausführliche Lösungen
	b)	Wird das Medikament nach t = 4 Tagen verabreicht, so entsteht keine Schädigung, da $W < W_{max}$.
	c)	Wird das Medikament nach t = 5 Tagen verabreicht, so entsteht eine Schädigung, da $W > W_{max}$.

Ausführliche Lösungen

A7 Zusammengesetzte Funktion

a) Es handelt sich um eine aus zwei Teilfunktionen zusammengesetzte Funktion.

$f(x) = e^x - 1 \qquad g(x) = f(t) \cdot e^{-(x-t)}$

Für t = 4 gilt: $f(4) = e^4 - 1$

$$h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ (e^4 - 1) \cdot e^{-(x-4)} & \text{für } 4 \le x < \infty \end{cases}$$

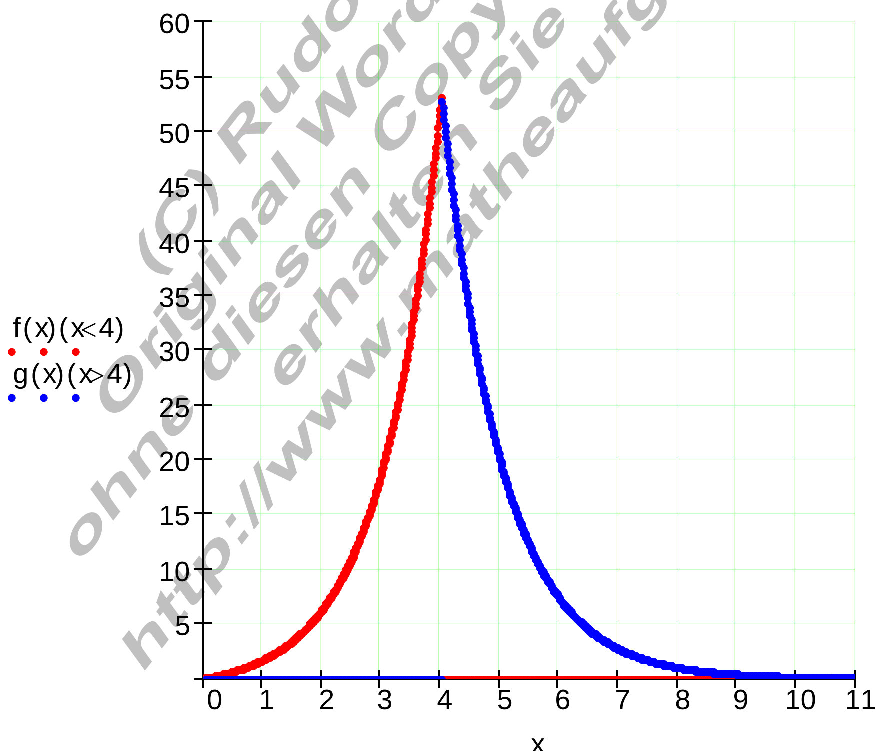
A7 Wertetabelle

a)

x	0	1	2	3	4	5
h(x)	0	1,72	6,39	19,9	53,6	19,72
x	6	7	8	9	10	11
h(x)	7,25	2,67	0,98	0,36	0,13	0,05

A7 Der Graph

a)



A7	Wirkungsfaktor nach 4 Tagen	
	b)	Der Wirkungsfaktor (Medikament wird nach 4 Tagen verabreicht). $t = 4 \Rightarrow W = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^\infty g(x)\,dx = \int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx + \left(e^4 - 1\right)\int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx = W_1 + W_2$ $W_1 = \int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx = \left[e^x - x\right]_0^4 = e^4 - 4 - \left(e^0 - 0\right) = e^4 - 4 - 1 = e^4 - 5$ $\int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_4^a e^{-(x-4)}\,dx$ Lösung durch einfache Substitution $u(x) = -x + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$ $ug: u(4) = -4 + 4 = 0 \qquad og: u(a) = -a + 4$ $\int_4^a e^{-(x-4)}\,dx = -\int_0^{-a+4} e^u\,du = \left[-e^u\right]_0^{-a+4} = -e^{-a+4} - \left(-e^0\right) = -e^{-a+4} + 1$ $\int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-a+4} + 1\right) = 1$ $W_2 = \left(e^4 - 1\right)\int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx = \left(e^4 - 1\right)\cdot 1 = e^4 - 1$ $W = W_1 + W_2 = e^4 - 5 + e^4 - 1 = 2\cdot e^4 - 6 \approx \underline{\underline{103,196}}$ Wird das Medikament nach t = 4 Tagen verabreicht, so entsteht keine Schädigung, da $W < W_{max}$.

A7	Wirkungsfaktor nach 5 Tagen	
	c)	Der Wirkungsfaktor (Medikament wird nach 5 Tagen verabreicht). Gleiche Rechnung unter Berücksichtigung von t = 5. $t=5\Rightarrow W=\int_0^5 f(x)\,dx+\int_5^\infty g(x)\,dx=\int_0^5\left(e^x-1\right)dx+\left(e^5-1\right)\int_5^\infty e^{-(x-5)}\,dx=W_1+W_2$ $W_1=\int_0^5\left(e^x-1\right)dx=\left[e^x-x\right]_0^5=e^5-5-\left(e^0-0\right)=e^5-5-1=e^5-6$ $\int_5^\infty e^{-(x-5)}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_5^a e^{-(x-5)}\,dx$ Lösung durch einfache Substitution $u(x)=-x+5\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du$ $ug:u(5)=-5+5=0 \qquad og:u(a)=-a+5$ $\int_5^a e^{-(x-5)}\,dx=-\int_0^{-a+5}e^u\,du=\left[-e^u\right]_0^{-a+5}=-e^{-a+5}-\left(-e^0\right)=-e^{-a+5}+1$ $\int_5^\infty e^{-(x-5)}\,dx=\lim_{x\to\infty}\left(-e^{-a+5}+1\right)=1$ $W_2=\left(e^5-1\right)\int_5^\infty e^{-(x-5)}\,dx=\left(e^5-1\right)\cdot 1=e^5-1$ $W=W_1+W_2=e^5-6+e^5-1=2\cdot e^5-7\approx\underline{\underline{289{,}826}}$ Wird das Medikament nach t = 5 Tagen verabreicht, so entsteht eine Schädigung, da $W>W_{max}$.