

Abiturvorbereitung

Kurvendiskussion und Integration einer e- Funktion verknüpft mit 6x.
Aufgabe mit Ergebnissen und ausführlichen Lösungen

Aufgabe 2

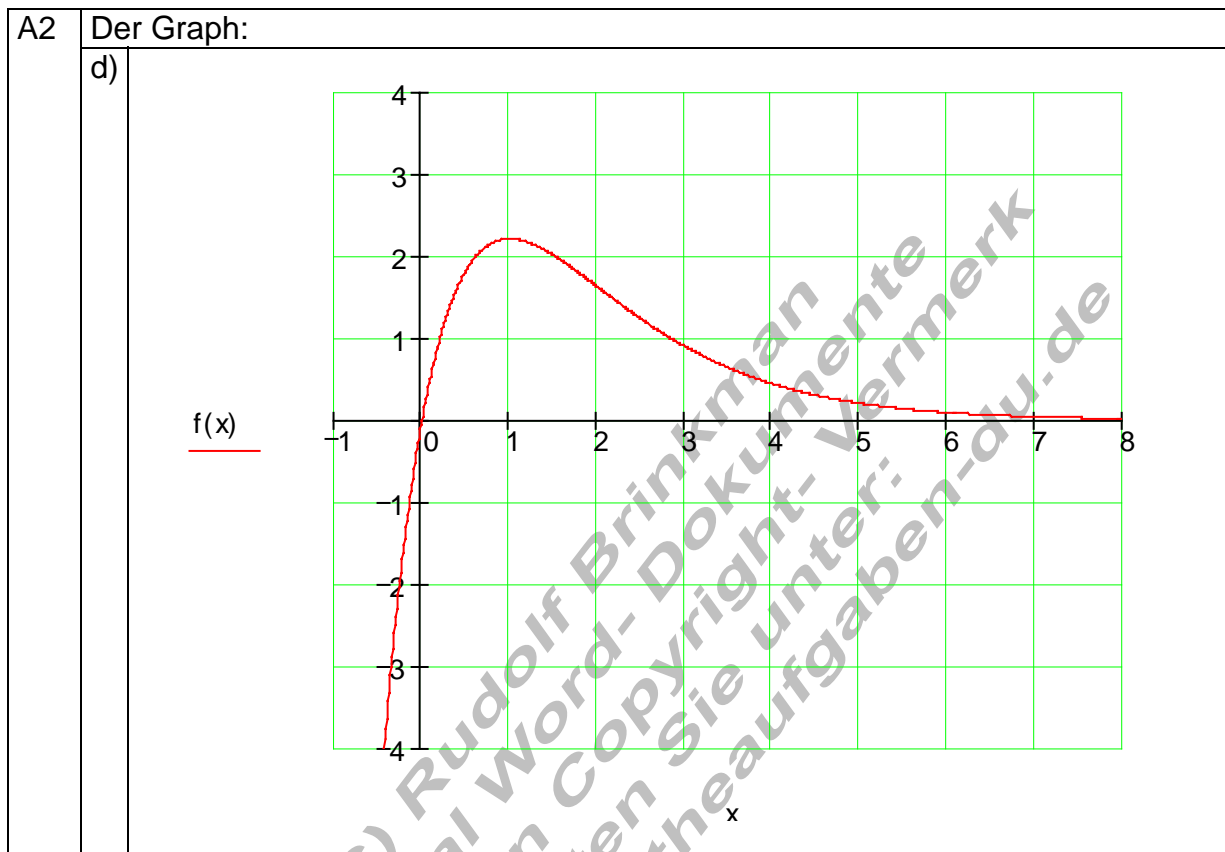
2.	Gegeben ist die Funktion f(x) mit $f(x) = 6x \cdot e^{-x}$
a)	Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y- Achse
b)	Gibt es einen Schnittpunkt mit der x- Achse? Begründen Sie ihre Antwort.
c)	Untersuchen Sie die Funktion auf Extremwerte und Wendepunkte.
d)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall [0 ; 6] 1LE = 1cm. Legen sie dazu eine Wertetabelle an (Abstand der Punkte 1 cm).
e)	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse im Intervall [0 ; 5] und kennzeichnen Sie die Fläche.
f)	Bestimmen Sie die Randwerte des Definitionsbereichs.

E2	Ergebnisse
a)	Schnittpunkt mit der y – Achse : $P_y (0 0)$
b)	$f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x} \Rightarrow P_x (0 0)$ Satz vom Nullprodukt
c)	relatives Maximum: $P_{\text{Max}} \left(1 \mid \frac{6}{e} \approx 2,207 \right)$ Wendepunkt: $P_w \left(2 \mid \frac{12}{e^2} \approx 1,624 \right)$
d)	Wertetabelle und Graph siehe ausführliche Lösungen.
e)	$A = 6 \cdot \int_0^5 x \cdot e^{-x} dx = -36 \cdot e^{-5} + 6 \approx 5,757 \text{ FE}$
f)	Randwerte des Definitionsbereichs. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 6x \cdot e^{-x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 6x \cdot e^{-x} = 0$

Ausführliche Lösungen

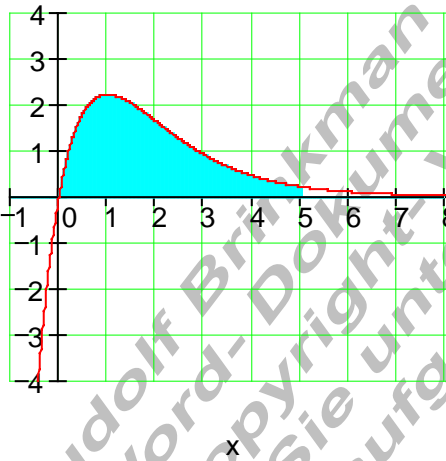
A2	<p>Schnittpunkt mit der y- Achse</p> <p>a) $f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ für $x = 0$ gilt: $f(0) = 6 \cdot 0 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 0)}}$</p>
A2	<p>Schnittpunkt mit der x- Achse</p> <p>b) $f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ Ansatz: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_x(0 0)}}$</p> <p>Nach dem Satz vom Nullprodukt, ist ein Produkt genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Diese Bedingung ist für $f(x)$ nur dann erfüllt, wenn die Variable x Null ist. Die e- Funktion wird im Endlichen nie Null.</p>
A2	<p>Berechnung der Ableitungen</p> <p>c) $f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ mit $u = 6x \Rightarrow u' = 6$ und $v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$ wird $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 6 \cdot e^{-x} - 6x \cdot e^{-x} = (6 - 6x) \cdot e^{-x}$ mit $u = 6 - 6x \Rightarrow u' = -6$ und $v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$ wird $f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = -6 \cdot e^{-x} - (6 - 6x) \cdot e^{-x}$ $= [-6 - (6 - 6x)] \cdot e^{-x} = [-6 - 6 + 6x] \cdot e^{-x} = (-12 + 6x) \cdot e^{-x}$ mit $u = -12 + 6x \Rightarrow u' = 6$ und $v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$ wird $f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 6 \cdot e^{-x} - (-12 + 6x) \cdot e^{-x}$ $= [6 - (-12 + 6x)] \cdot e^{-x} = [6 + 12 - 6x] \cdot e^{-x} = (18 - 6x) \cdot e^{-x}$</p>
A2	<p>Berechnung der Extrempunkte</p> <p>c) $f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ $f'(x) = (6 - 6x) \cdot e^{-x}$ $f''(x) = (-12 + 6x) \cdot e^{-x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (6 - 6x) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ (waagerechte Tangente) $f''(x_1) = f''(1) = (-12 + 6 \cdot 1) \cdot e^{-1} < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1 = x_e = 1$ $y_e = f(x_e) = f(1) = 6 \cdot 1 \cdot e^{-1} = 6 \cdot e^{-1} = \frac{6}{e} \approx 2,207$ relatives Maximum (Hochpunkt) $\underline{\underline{P_{\text{Max}}\left(1 \mid \frac{6}{e} \approx 2,207\right)}}$</p>
A2	<p>Die Wendepunktberechnung</p> <p>c) $f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ $f''(x) = (-12 + 6x) \cdot e^{-x}$ $f'''(x) = (18 - 6x) \cdot e^{-x}$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (-12 + 6x) \cdot e^{-x} \Leftrightarrow x_1 = 2$ $f'''(x_1) = f'''(2) = (18 - 6 \cdot 2) \cdot e^{-2} = 6 \cdot e^{-2} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_w = 2$ (Wendestelle) $y_w = f(x_w) = f(2) = 6 \cdot 2 \cdot e^{-2} = 12 \cdot e^{-2} = \frac{12}{e^2} \approx 1,624$ Wendepunkt: $\underline{\underline{P_w\left(2 \mid \frac{12}{e^2} \approx 1,624\right)}}$</p>

A2	Die Wertetabelle:								
	d)	x	0	1	2	3	4	5	6
		f(x)	0	2,21	1,62	0,9	0,44	0,2	0,09



A2	Ansatz und Nebenrechnung
e)	<p> $f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ gesucht: $A = \int_0^5 f(x) dx = 6 \cdot \int_0^5 x \cdot e^{-x} dx$ </p> <p> Allgemeine Lösung von $\int x \cdot e^{-x} dx$ durch partielle Integration </p> $\int \underbrace{u}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$ <p> mit $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = \int e^{-x} dx$ </p> <p> ----- Nebenrechnung ----- </p> <p> $v(x) = \int e^{-x} dx$ Lösung durch einfache Substitution: </p> $u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$ $\int e^{-x} dx = -\int e^u du = -e^u \Rightarrow v(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

A2	Integral und Flächenberechnung
e)	$\int x \cdot e^{-x} dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx$ $= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -(x+1) \cdot e^{-x} \Rightarrow 6 \cdot \int x \cdot e^{-x} dx = -6(x+1) \cdot e^{-x}$ $A = 6 \cdot \int_0^5 x \cdot e^{-x} dx = \left[-6(x+1) \cdot e^{-x} \right]_0^5 = -6(5+1) \cdot e^{-5} - \left[-6(0+1) \cdot e^0 \right]$ $= -36 \cdot e^{-5} + 6 \cdot e^0 = -36 \cdot e^{-5} + 6 \approx \underline{\underline{5,757}}$

A2	Darstellung der Fläche
e)	 <p> $f(x) (0 < x < 5)$ $f(x)$ </p> <p>Der Flächeninhalt beträgt etwa 5,757 FE</p>

A2	Randwerte des Definitionsbereichs (aus der Grafik abgelesen).
f)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 6x \cdot e^{-x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 6x \cdot e^{-x} = 0$