Abiturvorbereitung

Kurvendiskussion und Integration einer e- Funktion verknüpft mit (2x + 2).
Aufgabe mit Ergebnissen und ausführlichen Lösungen

Aufgabe 1

1.		Gegeben ist die Funktion f(x) mit $f(x) = (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$
	a)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	b)	Untersuchen Sie die Funktion auf Extremwerte und Wendepunkte.
	c)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall [-8 ; 1] 1LE = 1cm. Legen sie dazu eine Wertetabelle an (Abstand der Punkte 1 cm).
	d)	Berechnen Sie die Fläche zwischen den Koordinatenachsen und kennzeichnen Sie die Fläche.
	e)	Bestimmen Sie die Randwerte des Definitionsbereichs.

E1		**Ergebnisse**
	a)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0\,\vert\,2)\,;P_{x1}(-1\,\vert\,0)$
	b)	Relatives Minimum: $P_{Min}\left(-3\,\vert\,-4\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx -0{,}89\right)$ Wendepunkt: $P_W\left(-5\,\vert\,-8\cdot e^{-\frac{5}{2}}\approx -0{,}66\right)$
	c)	Wertetabelle und Graph siehe ausführliche Lösung.
	d)	Fläche zwischen den Koordinatenachsen: $A = 4\left(2\cdot e^{-\frac{1}{2}}-1\right)\approx 0{,}852\,FE$
	e)	Randwerte des Definitionsbereichs $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \infty$

Ausführliche Lösungen

A1 Berechnung der Achsenschnittpunkte

a)

$$f(x)=(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$$y_s=f(0)=2\cdot e^0=2\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,2)}}$$

Schnittpunkt mit der x – Achse:

$$f(x)=0\Leftrightarrow(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0\Rightarrow 2x+2=0\Rightarrow x_1=-1\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(-1\,|\,0)}}$$

Bemerkung: $e^{\frac{1}{2}x}\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

A1 Berechnung der Ableitungen

b)

$$f(x)=(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v' \text{ mit } u=2x+2\Rightarrow u'=2 \text{ und } v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=2\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(2x+2)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left[2+\frac{1}{2}\cdot(2x+2)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$=(2+x+1)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{(x+3)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v' \text{ mit } u=x+3\Rightarrow u'=1 \text{ und } v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(x+3)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left[1+\frac{1}{2}\cdot(x+3)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\frac{1}{2}(x+5)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v' \text{ mit } u=\frac{1}{2}(x+5)\Rightarrow u'=\frac{1}{2} \text{ und } v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}(x+5)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot(x+5)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot x+\frac{5}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\frac{1}{4}(x+7)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

A1	Berechnung der Extremwerte
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x_1=-3$ $f''(x_1)=f''(-3)=\frac{1}{2}(-3+5)\cdot e^{-\frac{3}{2}}>0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_1=x_{min}=-3$ $y_{Min}=f(x_{Min})=f(-3)=[2\cdot(-3)+2]\cdot e^{-\frac{3}{2}}=-4\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx -0,89$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}\left(-3 \mid -4\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx -0,89\right)}}$

A1	Wendepunktberechnung
b)	$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+5)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x_1=-5$ $f'''(x_1)=f'''(-5)=\frac{1}{4}(-5+7)\cdot e^{-\frac{3}{2}}\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_1=x_W=-5$ $y_W=f(x_W)=f(-5)=[2\cdot(-5)+2]\cdot e^{-\frac{5}{2}}=-8\cdot e^{-\frac{5}{2}}\approx -0,66$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_W\left(-5 \mid -8\cdot e^{-\frac{5}{2}}\approx -0,66\right)}}$

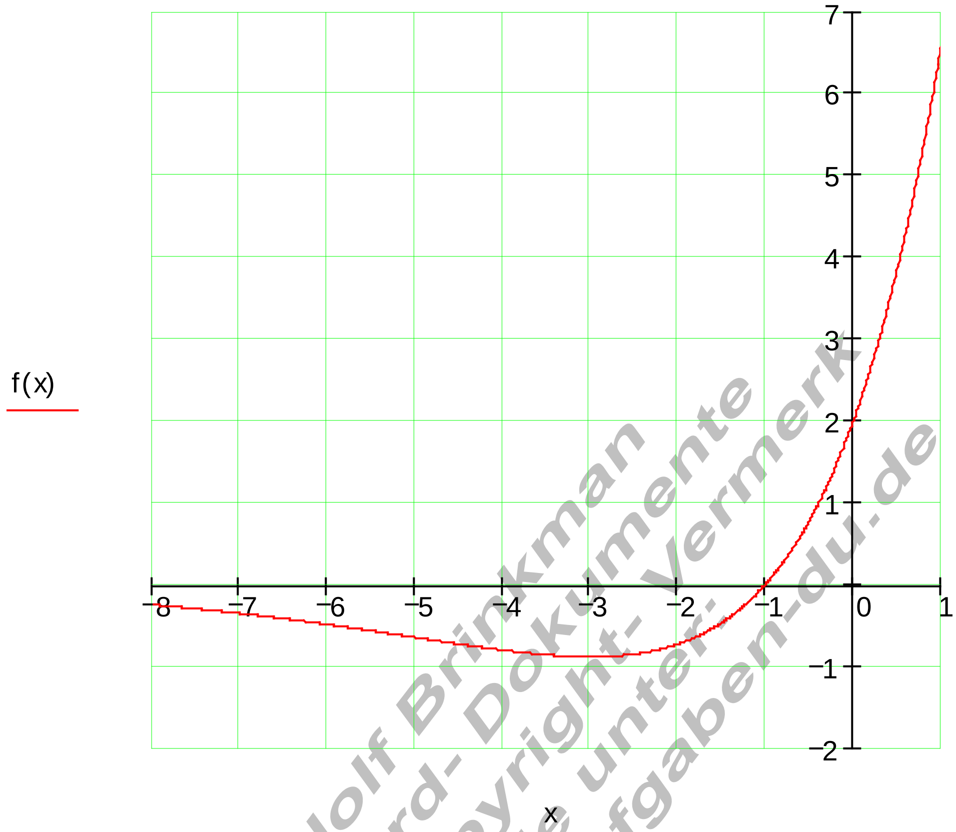
A1 Die Wertetabelle

c)

				P_W		P_{Min}		P_{x1}	P_y	
x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0,26$	$-0,36$	$-0,5$	$-0,66$	$-0,81$	$-0,89$	$-0,74$	0	2	$6,59$

A1 Der Graph

c)



A1 Integration durch Substitution

d)

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

Zuerst wird das Integral allgemein gelöst, dann werden die Grenzen eingesetzt.

$$\int f(x)\,dx = \int (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\underbrace{\int x\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{\mathrm{I}} + 2\underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{\mathrm{II}} = 2\cdot \mathrm{I} + 2\cdot \mathrm{II}$$

Beginne mit dem einfachsten Integral:

$$\mathrm{II}: \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx \text{ Substitution } u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{Merke: } \boxed{\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

A1 Partielle Integration

d)

$$I: \int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \qquad \text{(partielle Integration)}$$

$$\text{mit } u = x \Rightarrow u' = 1 \text{ und } v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\int x\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = x\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$= 2x\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{Merke: } \boxed{\int x\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

A1 Integrale zusammenfügen

d)

$$\int f(x)\,dx = 2\cdot I + 2\cdot II = 4x\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 8\cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 4x\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 4(x-1)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{Merke: } \boxed{\int f(x)\,dx = 4(x-1)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

Grenzen einsetzen:

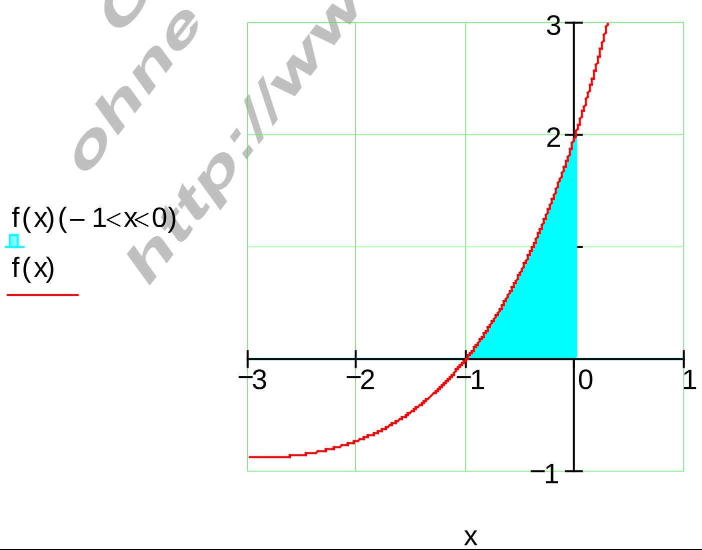
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[4(x-1)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right]_{-1}^{0} = 4\cdot(-1)\cdot e^{0} - \left[4(-1-1)\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -4 + 8\cdot e^{-\frac{1}{2}} = 4\left(2\cdot e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \approx 0{,}852$$

$$\text{Fläche: } A = 4\left(2\cdot e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \approx \underline{\underline{0{,}852\,FE}}$$

A1 Die Fläche

d)



A1	Randwerte des Definitionsbereichs (anschaulich aus der Grafik).	
	e)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \infty$