Lösungen lineare Funktionen Teil XVII

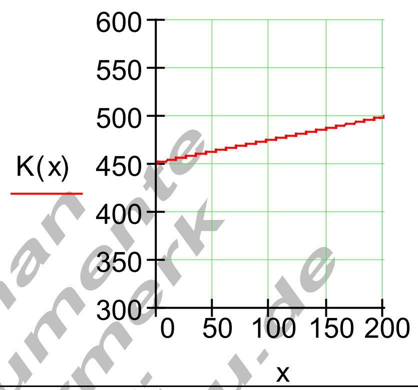
Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt den Graphen einer linearen Kostenfunktion (Gesamtkosten).

a) Entnehmen Sie dem Graphen die fixen Kosten und die variablen Stückkosten in €. Geben Sie die Gesamtkosten K bei einer Produktion von x Mengeneinheiten (ME) an.

b) Welcher Verkaufspreis je ME ist zu erzielen, wenn 175 ME erzeugt werden und kein Verlust entstehen soll.



A1 Ausführliche Lösung

Begriffsdefinitionen zur betrieblichen Kostenrechnung:

Gesamtkosten
sind die in einem Betrieb bei der Produktion eines Produktes entstehenden Kosten K(x).

Fixkosten
sind die Kosten, die auch dann entstehen, wenn nichts produziert wird. (Zinsen, Mieten, Versicherungen, Gehälter usw.)
$K_f(x) = K(0)$

Variable Gesamtkosten
sind die Gesamtkosten ohne Fixkosten.
$K_v(x) = K(x) - K_f(x) = K(x) - K(0)$

Variable Stückkosten
sind die variablen Kosten pro Stück.
$k_v(x) = \frac{K_v}{x} = \frac{K(x) - K_f(x)}{x} = \frac{K(x) - K(0)}{x}$

Lineare Erlösfunktion
Preis p mal Ausbringungsmenge x
$E(x) = p \cdot x$

Gewinnfunktion
Erlös – Gesamtkosten
$G(x) = E(x) - K(x)$

a) Die Kostenfunktion ist hier eine lineare Funktion: $K(x) = a_1x + a_0$

Die fixen Kosten sind $K(0) = a_0 = 450$ € (abgelesen aus dem Graphen).

Die variablen Stückkosten sind $k_v(x) = \frac{K(x) - K(0)}{x} = \frac{a_1x + a_0 - a_0}{x} = a_1$

Das ist genau die Steigung der Geraden von K(x).

Abzulesen sind die Punkte $P_1(0\,|\,450)$ und $P_1(200\,|\,500)$

$\Rightarrow a_1 = \frac{500 - 450}{200 - 0} = 0{,}25 \Rightarrow$ variable Stückkosten $k_v = 0{,}25$ €

Kostenfunktion: $\underline{\underline{K(x) = 0{,}25x + 450}}$

A1 Ausführliche Lösung

b) Gewinn: $G(x) = E(x) - K(x)$

Wenn kein Verlust entstehen soll, muss der Gewinn mindestens Null sein.

$\Rightarrow E(x) - K(x) = 0$

aus $E(x) = p \cdot x$ und $K(x) = 0{,}25x + 450$ folgt:

$p \cdot x - (0{,}25x + 450) = 0 \Leftrightarrow p \cdot x = 0{,}25x + 450$

$$\Leftrightarrow p = \frac{0{,}25x + 450}{x} = 0{,}25 + \frac{450}{x}$$

Für $x = 175$ ME gilt: $p(175) = 0{,}25 + \dfrac{450}{175} = 2{,}821$

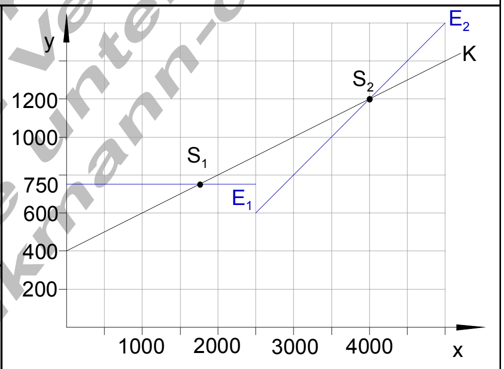
Der Stückpreis muss mindestens 2,83 € betragen, damit kein Verlust entsteht.

A2 Aufgabe

Die Kosten K für die Herstellung von Tennisbällen hängen linear von der produzierten Stückzahl x ab.

a) Wie teuer ist die Produktion von 1000 bzw. 3000 Bällen? Geben Sie einen Term für die Kostenfunktion K an. Wie hoch sind die fixen Kosten K_f? Wie hoch sind die variablen Stückkosten k_v?

b) Für den Erlös gilt bis 2500 Stück ein Pauschalbetrag E_1 = 750 €. Ab 2500 Stück steigt der Erlös linear mit der Anzahl der verkauften Bälle (E_2). Bestimmen Sie die Erlösfunktion $E_2(x)$ für x > 2500 und die Schnittpunkte S_1 und S_2. Kommentieren Sie die x – Werte zwischen S_1 und S_2.



A2 Ausführliche Lösung

a) 1000 Bälle: $P_1(1000 \mid 600)$, 3000 Bälle: $P_2(3000 \mid 1000)$

Kostenfunktion: $K(x) = a_1x + a_0$

$$P_1 ; P_2 \Rightarrow a_1 = \frac{1000 - 600}{3000 - 1000} = 0{,}2 \Rightarrow K(x) = 0{,}2x + a_0$$

$P_1(1000 \mid 600)$: $K(1000) = 0{,}2 \cdot 1000 + a_0 = 600 \Rightarrow a_0 = 400$

$\Rightarrow \underline{\underline{K(x) = 0{,}2x + 400}}$

Fixkosten: $K(0) = a_0 = \underline{\underline{400\ €}}$

Variable Stückkosten: $k_v = a_1 = \underline{\underline{0{,}2\ €}}$

A2 Ausführliche Lösung

b) Erlösfunktion für $x < 2500: E(x) = 750$

Erlösfunktion für $x > 2500$:

$P_1(2500 \mid 600); P_2(4000 \mid 1200) \quad E_2(x) = a_1x + a_0$

$$a_1 = \frac{1200 - 600}{4000 - 2500} = 0,4 \Rightarrow E_2(x) = 0,4x + a_0$$

$P_2(4000 \mid 1200): \quad E_2(4000) = 0,4 \cdot 4000 + a_0 = 1200 \Rightarrow a_0 = -400$

$\Rightarrow \underline{\underline{E_2(x) = 0,4x - 400}}$

Schnittpunkt S_1: $K(x) = E_1(x) \Leftrightarrow 0,2x + 400 = 750 \Rightarrow x = 1750$

$K(1750) = 750 \Rightarrow \underline{\underline{S_1(1750 \mid 750)}}$

Schnittpunkt S_1: $E_2(x) = K(x) \Leftrightarrow 0,4x - 400 = 0,2x + 400 \Rightarrow x = 4000$

$K(4000) = 0,2 \cdot 4000 + 400 = 1200 \Rightarrow \underline{\underline{S_2(4000 \mid 1200)}}$

Interpretation:
Für $1750 < x < 4500$ entsteht ein Verlust, da $E(x) < K(x)$.
Schnittpunkt von $E_1(x)$ mit $E_2(x)$ ist S_3
$E_2(x) = E_1(x) \Leftrightarrow 0,4x - 400 = 750 \Leftrightarrow x = 2875$
$E_2(2875) = 0,4 \cdot 2875 - 400 = 750 \Rightarrow \underline{\underline{S_3(2875 \mid 750)}}$

Für den Kunden ist der Bereich 2500 < x < 2875 sehr lukrativ.
Er bekommt beispielsweise 2800 Bälle günstiger als 2500 Bälle.

A3 Aufgabe

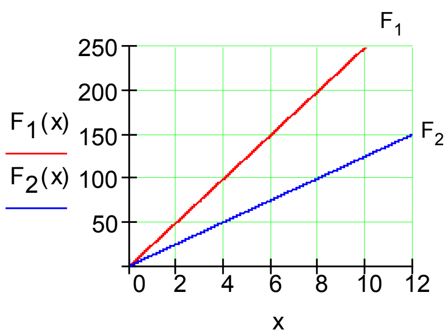
Um eine Schraubenfeder als Federwaage benutzen zu können, wird der Zusammenhang zwischen der an der Feder wirkenden Gewichtskraft F_G (in Newton N) und der Federauslenkung x (in cm) festgestellt.

a) Bestimmen Sie die Federkonstante D bei Feder F_2.
Welche Bedeutung hat D?

b) Bestimmen Sie einen Term, der die Abhängigkeit der Kraft F von der Auslenkung x beschreibt.

c) Ist es möglich, mit dieser Formel die für 1 m Auslenkung benötigte Kraft F_G zu bestimmen?

d) Was bedeuten die unterschiedlichen Federkonstanten für die Feder F_1 bzw. F_2?



A3 Ausführliche Lösung

a) Federkonstante bei Feder F_2: $\quad D_2 = \frac{F}{x} = \frac{50\text{ N}}{4\text{ cm}} = 12,5\frac{\text{N}}{\text{cm}}$

Die Federkonstante ist ein Maß für die Steigung der Geraden.

A3	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$D_1 = \frac{100\text{ N}}{4\text{ cm}} = 25\frac{\text{N}}{\text{cm}} \Rightarrow \underline{\underline{F_1(x) = 25\frac{\text{N}}{\text{cm}}\cdot x}}$ und $\underline{\underline{F_2(x) = 12{,}5\frac{\text{N}}{\text{cm}}\cdot x}}$

A3	**Ausführliche Lösung**	
	c)	Theoretisch: $F_1(100) = 25\frac{\text{N}}{\text{cm}}\cdot 100\text{ cm} = 2500\text{ N}$ Tatsächlich würde die Feder bei einer Auslenkung von 1 m überdehnt werden.

A3	**Ausführliche Lösung**	
	d)	Die unterschiedlichen Federkonstanten kennzeichnen die unterschiedlichen Federhärten beider Federn.

A4	**Aufgabe**	
	Ein Internetanbieter unterbreitet einem Nutzer folgendes Angebot: 50 Stunden Internet, Gesamtkosten 27,50 €. Jede weitere Minute 1 Ct. Erarbeiten Sie zwei Tarifmodelle, die dem Internetnutzer für 50 Stunden die gleichen Bedingungen einräumen.	
	a)	Tarif I ohne Grundgebühren.
	b)	Tarif II mit 8 € Grundgebühren.
	c)	Welcher Tarif ist der günstigste bei einer Nutzungsdauer über 50 Stunden?

A4	**Ausführliche Lösung**	
	a)	50 Stunden = 3000 Minuten, Kosten 27,50 € $\Rightarrow$ Kosten pro Minute: $\frac{27{,}50\text{ €}}{3000} = \frac{11}{1200}\text{ €} \quad \Rightarrow \underline{\underline{K_1(x) = \frac{11}{1200}x \approx 0{,}0092\cdot x}}$

A4	**Ausführliche Lösung**	
	b)	8 € Grundgebühren, für 3000 Minuten verbleiben noch 19,5 €. $\Rightarrow$ Kosten pro Minute: $\frac{19{,}50\text{ €}}{3000} = \frac{13}{2000}\text{ €}$ $\Rightarrow K_2(x) = \frac{13}{2000}x + 8 = \underline{\underline{0{,}0065\cdot x + 8}}$

A4	**Ausführliche Lösung**	
	c)	Tarif II ist bei einer Internetnutzung von mehr als 50 Stunden der günstigste, da jede weitere Minute nur noch 0,65 Cent kostet.