Lösungen lineare Funktionen Teil IV

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**					
	Ermitteln Sie den Funktionsterm der linearen Funktion f(x), wenn gilt:					
	a)	$f(1)=7\,;\,f(-1)=3$	b)	$f(a)=0\,;\,f(0)=a$	c)	$f(a)=1;\,f(2a)=-1$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$f(1)=7 \Rightarrow P_1(1\,\vert\,7)\,;\,f(-1)=3 \Rightarrow P_1(-1\,\vert\,3)$
		$a_1=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=\frac{3-7}{-1-1}=2 \Rightarrow f(x)=2x+a_0$
		$P_1(1\,\vert\,7):\quad \Rightarrow f(1)=2\cdot 1+a_0=7 \Rightarrow a_0=5 \Rightarrow \underline{\underline{f(x)=2x+5}}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$f(a)=0 \Rightarrow P_1(a\,\vert\,0)\,;\,f(0)=a \Rightarrow P_2(0\,\vert\,a) \Rightarrow a_0=a \Rightarrow f(x)=a_1x+a$
		$a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{a-0}{0-a}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-x+a}}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	c)	$f(a)=1 \Rightarrow P_1(a\,\vert\,1)\,;\,f(2a)=-1 \Rightarrow P_1(2a\,\vert\,-1)$
		$a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-1}{2a-a}=-\frac{2}{a} \Rightarrow f(x)=-\frac{2}{a}x+a_0$
		$P_1(a\,\vert\,1):\quad f(a)=-\frac{2}{a}\cdot a+a_0=1 \Rightarrow a_0=3 \Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-\frac{2}{a}x+3\,;\,a\neq 0}}$

A2	**Aufgabe**
	Zeigen Sie: Die Gerade g durch $P_1\left(\sqrt{k}\,\vert\,k\right)$ und $P_2(1\,\vert\,1)$
	besitzt die Steigung $a_1=\sqrt{k}+1$ und schneidet die y - Achse in $P_y\left(0\,\vert\,-\sqrt{k}\right)$

A2	**Ausführliche Lösung**
	$P_1\left(\sqrt{k}\,\vert\,k\right);P_2(1\,\vert\,1)$ zu zeigen ist: $a_1=\sqrt{k}+1$ und $P_y\left(0\,\vert\,-\sqrt{k}\right) \Rightarrow a_0=-\sqrt{k}$
	$a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-k}{1-\sqrt{k}}=\frac{(1-k)\left(1+\sqrt{k}\right)}{\left(1-\sqrt{k}\right)\left(1+\sqrt{k}\right)}=\frac{(1-k)\left(1+\sqrt{k}\right)}{(1-k)}=1+\sqrt{k}=\underline{\underline{\sqrt{k}+1}}$
	$\Rightarrow f(x)=\left(\sqrt{k}+1\right)x+a_0$
	$P_2(1\,\vert\,1):\quad f(1)=\left(\sqrt{k}+1\right)\cdot 1+a_0=1 \Rightarrow \underline{\underline{a_0=-\sqrt{k}}} \Rightarrow \underline{\underline{f(x)=\left(\sqrt{k}+1\right)x-\sqrt{k}}}$
	$f(0)=\left(\sqrt{k}+1\right)\cdot 0-\sqrt{k}=-\sqrt{k} \Rightarrow P_y\left(0\,\vert\,-\sqrt{k}\right)$

A3	Aufgabe
	Zeigen Sie: Die Punkte $P\left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\ \middle|\ k\right)$ liegen für alle $k \in \mathbb{R}$ auf einer Geraden. Bestimmen Sie die Geradengleichung.

A3	**Ausführliche Lösung**

$$P\left(\frac{k}{2}\sqrt{2}\,|\,k\right) \Rightarrow P_1\left(\frac{k_1}{2}\sqrt{2}\,|\,k_1\right) \Rightarrow P_2\left(\frac{k_2}{2}\sqrt{2}\,|\,k_2\right) \Rightarrow P_3\left(\frac{k_3}{2}\sqrt{2}\,|\,k_3\right)$$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k_2 - k_1}{\frac{k_2}{2}\sqrt{2} - \frac{k_1}{2}\sqrt{2}} = \frac{(t_2 - t_1)}{\frac{1}{2}\sqrt{2}(k_2 - k_1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2}x + a_0$$

$$P_1\left(\frac{k_1}{2}\sqrt{2}\,|\,k_1\right):\quad f\left(\frac{k_1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{k_1}{2}\sqrt{2}\right) + a_0 = k_1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{k_1}{2}\sqrt{2}\right) + a_0 = k_1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{k_1}{2} + a_0 = k_1 \Leftrightarrow k_1 + a_0 = k_1 \Rightarrow a_0 = 0$$

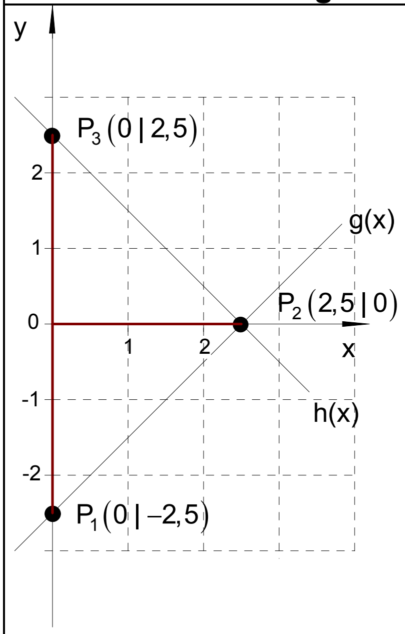
$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \sqrt{2}x}}$$

$$P_3\left(\frac{k_3}{2}\sqrt{2}\,|\,k_3\right):\quad f\left(\frac{k_3}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{k_3}{2}\sqrt{2}\right) = k_3$$

A4 Aufgabe

Eine Gerade durch P (2,5 | 0) schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Für welche Steigung ist dieses Dreieck gleichschenklig?

A4 Ausführliche Lösung



Steigung von g(x):

$$a_{1g} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-2{,}5)}{2{,}5-0} = 1$$

Steigung von h(x):

$$a_{1h} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{2{,}5-0}{0-2{,}5} = -1$$

Das Dreieck ist gleichschenklig für $\underline{\underline{a_1 = \pm 1}}$

A5 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3e^{-0{,}5x} \quad x \in \mathbb{R}$.

Für eine lineare Funktion $h(x)$ gilt:

$h(0) = f(0)$ und $h(-2) = f(-2)$. Bestimmen Sie $h(x)$.

A5 Ausführliche Lösung

$f(x) = 3e^{-0{,}5x}$

$h(0) = f(0) = 3e^0 = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow P_1(0\,|\,3) \Rightarrow a_0 = 3$ Bemerkung: $e^0 = 1$

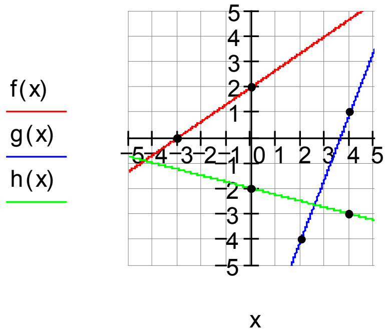
$h(-2) = f(-2) = 3e^{-0{,}5\cdot(-2)} = 3e^1 = 3e \Rightarrow P_2(-2\,|\,3e)$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3e-3}{-2-0} = \frac{3e-3}{-2} = -\frac{3}{2}(e-1) \Rightarrow \underline{\underline{h(x) = -\frac{3}{2}(e-1)x + 3}}$$

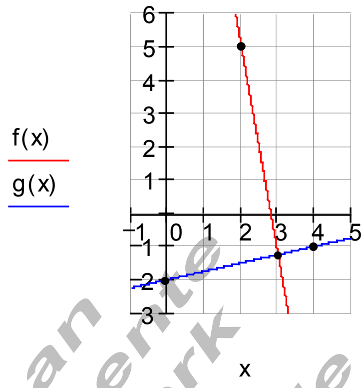
A6 Aufgabe

Folgende Abbildungen enthalten Graphen von linearen Funktionen.
Bestimmen Sie die Funktionsterme.

a)



b)



A6 Ausführliche Lösung

a) $\underline{\underline{f(x)=\frac{2}{3}x+2}}$ $\quad\underline{\underline{h(x)=-\frac{1}{4}x-2}}$ direkt abgelesen

$g(x)=\frac{5}{2}x+a_0$ mit $P(4\,|\,1)$: $\;g(4)=\frac{5}{2}\cdot 4+a_0=1\Rightarrow a_0=-9\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=\frac{5}{2}x-9}}$

A6 Ausführliche Lösung

b) Der Term für g(x) lässt sich aus dem Graphen ablesen: $g(x)=\frac{1}{4}x-2$

Von f(x) ist bekannt: $P_1(2\,|\,5)$ und $P_2(3\,|\,g(3))$

$$g(3)=\frac{1}{4}\cdot 3-2=-\frac{5}{4}\Rightarrow P_2\left(3\,\middle|\,-\frac{5}{4}\right)$$

$$a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{5}{4}-5}{3-2}=\frac{-\frac{5}{4}-\frac{20}{4}}{1}=-\frac{25}{4}\Rightarrow f(x)=-\frac{25}{4}x+a_0$$

$P_1(2\,|\,5)$: $\quad f(2)=-\frac{25}{4}\cdot 2+a_0=5\Rightarrow a_0=\frac{35}{2}\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-\frac{25}{4}x+\frac{35}{2}}}$

A7	**Aufgabe**		
	Bestimmen Sie den Schnittpunkt beider Geraden und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem.		
	a) $f(x) = -3x + \frac{5}{4}$; $g(x) = -x - 1$	b)	$f: 2y - x = 3$; $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$
	c) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 1$; $g(x) = \frac{1}{6}x - 4$	d)	$f: x = 2$; $g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

A7 Ausführliche Lösung

a)

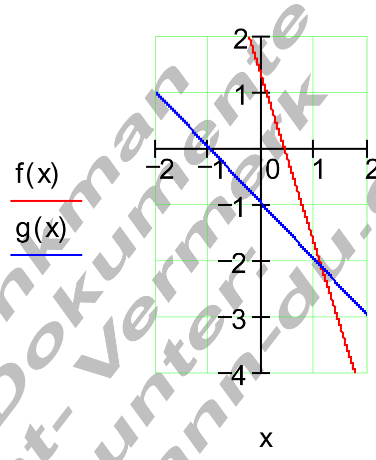
$f(x) = -3x + \frac{5}{4}$; $g(x) = -x - 1$

$f(x_s) = g(x_s)$

$\Rightarrow -3x_s + \frac{5}{4} = -x_s - 1 \Leftrightarrow x_s = \frac{9}{8}$

$y_s = g(x_s) = g\left(\frac{9}{8}\right) = -\frac{9}{8} - 1 = -\frac{17}{8}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{9}{8} \mid -\frac{17}{8}\right)}}$



A7 Ausführliche Lösung

b)

$f: 2y - x = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

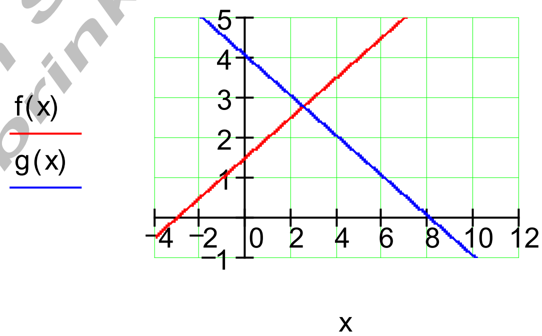
$f(x_s) = g(x_s)$

$\frac{1}{2}x_s + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x_s + 4$

$\Rightarrow x_s = \frac{5}{2}$

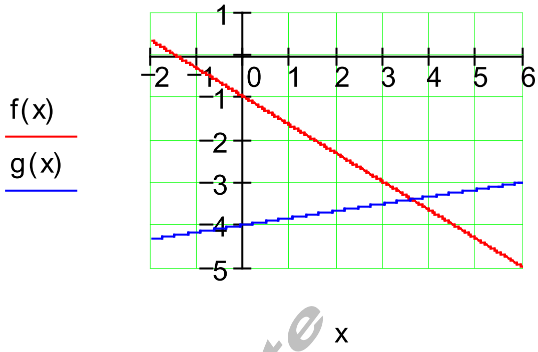
$y_s = f(x_s) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{5}{2} \mid \frac{11}{4}\right)}}$



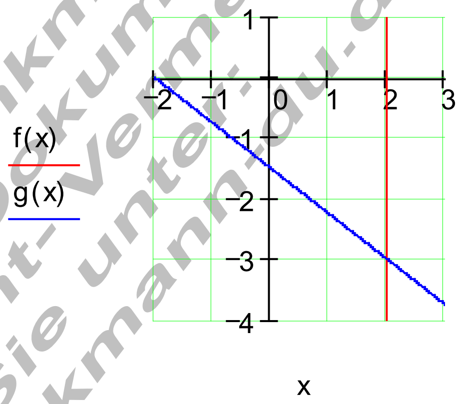
A7 Ausführliche Lösung

c)
$$f(x_s) = g(x_s)$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x_s - 1 = \frac{1}{6}x_s - 4 \Rightarrow x_s = \frac{18}{5}$$
$$y_s = g(x_s) = g\left(\frac{18}{5}\right) = -\frac{17}{5}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{18}{5} \,\middle|\, -\frac{17}{5}\right)}}$$



A7 Ausführliche Lösung

d)
$$x = 2 \Rightarrow x_s = 2$$
$$y_s = g(x_s) = g(2) = -\frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{3}{2} = -3$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{S(2\,|\,-3)}}$$



A8 Aufgabe

Zwei Geraden f(x) und g(x) schneiden sich auf der x– Achse in x = 4.
Bestimmen Sie mögliche Funktionsterme.

A8 Ausführliche Lösung

Geraden durch den Nullpunkt: $f(x) = a_1x \quad a_1 \in \mathbb{R}$

Verschoben durch $x = 4 \Rightarrow f^*(x) = a_1(x-4) \quad a_1 \in \mathbb{R}$

Beispiele: $a_1 = 1 \Rightarrow f(x) = x - 4$

$a_1 = 2 \Rightarrow g(x) = 2(x-4) = 2x - 8$