Aufgaben quadratische Gleichungen III

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse		
a)	$x^2+x=0 \Rightarrow L=\{0;-1\}$	b)	$x^2+4x=0 \Rightarrow L=\{0;-4\}$
c)	$4x^2=1 \Rightarrow L=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$	d)	$4x^2-16=0 \Rightarrow L=\{2;-2\}$
e)	$x^2=0 \Rightarrow L=\{0\}$	f)	$1-81x^2=0 \Rightarrow L=\left\{\frac{1}{9};-\frac{1}{9}\right\}$

E2	Ergebnisse		
a)	$x^2+\pi x=0 \Rightarrow L=\{0;-\pi\}$	b)	$x^2-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow L=\left\{\sqrt{\frac{1}{2}};-\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$
c)	$x^2-6x=0 \Rightarrow L=\{0;6\}$	d)	$(x+9)(x+7)=0 \Rightarrow L=\{-9;-7\}$
e)	$(x-2)^2=0 \Rightarrow L=\{2\}$	f)	$(x-3)(x+2)=0 \Rightarrow L=\{3;-2\}$

E3	Ergebnisse		
a)	$(x+a)(x-a)=0 \Rightarrow L=\{-a;a\}$	b)	$5(x+3)^2=0 \Rightarrow L=\{-3\}$
c)	$\frac{1}{3}(x+3)(x-2)=0 \Rightarrow L=\{-3;2\}$	d)	$(x+3)(x-2)(x+1)=0$ $\Rightarrow L=\{-3\ ;\ 2;-1\}$
e)	$(x-1)(x+1)^2=0 \Rightarrow L=\{1;-1\}$	f)	$(x+4)^2=2x+1 \Rightarrow L=\{\ \}$

E4	Ergebnisse
a)	$ax^2+ax-2=0\,;\,a\neq 0 \Rightarrow D=a^2+8a$
b)	$(a+1)x^2-x+a=0\,;\,a\neq -1 \Rightarrow D=-4a^2-4a+1$
c)	$\frac{a^2}{2}x^2-4x=x^2-ax+1\,;\,a\neq 0 \Rightarrow D=3a^2-8a+12$
d)	$(ax)^2-\sqrt{a}\cdot x+\frac{2}{a}=0\,;\,a>0 \Rightarrow D=-7a$

E5	Ergebnis
	$x^2+ax-1=0 \Rightarrow L=\left\{-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1};\ -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right\}$ zwei Lösungen wegen $D=\frac{a^2}{4}+1>0$

E6	Ergebnisse	
	a)	$-ax^2+2ax-a+1=0\,;\,a>0 \Rightarrow L=\left\{1+\sqrt{\frac{1}{a}}\,;\,1-\sqrt{\frac{1}{a}}\right\}$
	b)	$x^2-2ax-6a=-3x \Rightarrow L=\{-3\,;\,2a\}$
	c)	$-ax^2+2a^2x+3a^3=0 \Rightarrow L=\{-a\,;\,3a\}$
	d)	$-x^2+1{,}5ax-0{,}5a^2=0 \Rightarrow L=\left\{\frac{1}{2}a\,;\,a\right\}$
	e)	$-\frac{1}{a}\left(x^2-5x\right)=0\,;\,a\neq 0 \Rightarrow L=\{0\,;\,5\}$
	f)	$\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}ax-a^2=0 \Rightarrow L=\{-a\,;\,3a\}$

E7	Ergebnisse	
	a)	$2x^2+x-3a=0 \Rightarrow L=\left\{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{24a+1}\,;\,-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{24a+1}\right\}$ für $a>-\frac{1}{24}$ für $a=-\frac{1}{24} \Rightarrow L=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ für $a<-\frac{1}{24}$ keine Lösung
	b)	$ax^2+2x-3=0 \Rightarrow L=\left\{-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{3a+1}\,;\,-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\sqrt{3a+1}\right\}$ für $a>-\frac{1}{3}$ für $a=-\frac{1}{3} \Rightarrow L=\left\{-\frac{1}{a}\right\}$ für $a<-\frac{1}{3}$ keine Lösung
	c)	$x^2-ax+a=x \Rightarrow L=\{a\,;\,1\}$

E8	Ergebnis
	mit der Formel $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=1\pm\sqrt{2-3k}$ $D\geq 0 \Leftrightarrow k\leq\frac{2}{3}$

E9	Ergebnis
	$k^2-5k+k=k^2-4k=0$ für $k_1=0$ und $k_2=4$

E10	Ergebnis
	$L=\left\{1+\sqrt{k^2+1}\,;\,1-\sqrt{k^2+1}\right\}$ zwei Lösungen wegen $k^2+1>0$

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**					
	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen.					
	a)	$x^2 + x = 0$	b)	$x^2 + 4x = 0$	c)	$4x^2 = 1$
	d)	$4x^2 - 16 = 0$	e)	$x^2 = 0$	f)	$1 - 81x^2 = 0$

A1	Ausführliche Lösung			
	a)	$x^2 + x = 0$ $\Leftrightarrow x(x+1) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = -1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-1;0\}}}$ Lösung durch ausklammern und dem Satz vom Nullprodukt.	b)	$x^2 + 4x = 0$ $\Leftrightarrow x(x+4) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = -4$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-4;0\}}}$ Lösung durch ausklammern und dem Satz vom Nullprodukt.

A1	Ausführliche Lösung			
	c)	$4x^2 = 1 \mid :4$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}}}$ Lösung durch Wurzelziehen.	d)	$4x^2 - 16 = 0 \mid +16$ $\Leftrightarrow 4x^2 = 16 \mid :4$ $\Leftrightarrow x^2 = 4 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{4} = 2$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2;2\}}}$ Lösung durch Wurzelziehen.

A1	Ausführliche Lösung			
	e)	$x^2 = 0 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{0} = 0$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 0$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\}}}$ Lösung durch Wurzelziehen.	f)	$1 - 81x^2 = 0 \mid +81x^2 \Leftrightarrow 1 = 81x^2$ $\Leftrightarrow 81x^2 = 1 \mid :81 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{81} \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{9}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right\}}}$ Lösung durch Wurzelziehen.

A2	**Aufgaben**					
	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen.					
	a)	$x^2 + \pi x = 0$	b)	$x^2 - \frac{1}{2} = 0$	c)	$x^2 - 6x = 0$
	d)	$(x+9)(x+7) = 0$	e)	$(x-2)^2 = 0$	f)	$(x-3)(x+2) = 0$

A2	Ausführliche Lösung			
	a)	$x^2 + \pi x = 0$ $\Leftrightarrow x(x+\pi) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = -\pi$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-\pi\,;\,0\}}}$ Lösung durch ausklammern und dem Satz vom Nullprodukt.	b)	$x^2 - \frac{1}{2} = 0 \mid +\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \mid \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}}\,;\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}}}$ Lösung durch Wurzelziehen.

A2	Ausführliche Lösung			
	c)	$x^2 - 6x = 0$ $\Leftrightarrow x(x-6) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = 6$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\,;\,6\}}}$ Lösung durch ausklammern und dem Satz vom Nullprodukt.	d)	$(x+9)(x+7) = 0$ $(x+9) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -9$ $(x+7) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -7$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-9\,;\,-7\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.

A2	Ausführliche Lösung			
	e)	$(x-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)(x-2) = 0$ $(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ $(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{2\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt. Doppelte Nullstelle.	f)	$(x-3)(x+2) = 0$ $(x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$ $(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2\,;\,3\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.

A3	**Aufgabe**					
	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen.					
	a)	$(x+a)(x-a)=0$	b)	$5(x+3)^2=0$	c)	$\frac{1}{3}(x+3)(x-2)=0$
	d)	$(x+3)(x-2)(x+1)=0$	e)	$(x-1)(x+1)^2=0$	f)	$(x+4)^2=2x+1$

A3	Ausführliche Lösung			
	a)	$(x+a)(x-a)=0$ $(x+a)=0 \Leftrightarrow x_1=-a$ $(x-a)=0 \Leftrightarrow x_2=a$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-a\,;\,a\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.	b)	$5(x+3)^2=0$ $\Leftrightarrow 5(x+3)(x+3)=0$ $(x+3)=0 \Leftrightarrow x_1=-3$ $(x+3)=0 \Leftrightarrow x_2=-3$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-3\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt. Doppelte Nullstelle.

A3	Ausführliche Lösung			
	c)	$\frac{1}{3}(x+3)(x-2)=0$ $(x+3)=0 \Leftrightarrow x_1=-3$ $(x-2)=0 \Leftrightarrow x_2=2$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-3\,;\,2\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.	d)	$(x+3)(x-2)(x+1)=0$ $(x+3)=0 \Leftrightarrow x_1=-3$ $(x-2)=0 \Leftrightarrow x_2=2$ $(x+1)=0 \Leftrightarrow x_3=-1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-3\,;\,-1;\,2\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.

A3	Ausführliche Lösung			
	e)	$(x-1)(x+1)^2=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+1)=0$ $(x-1)=0 \Leftrightarrow x_1=1$ $(x+1)=0 \Leftrightarrow x_2=-1$ $(x+1)=0 \Leftrightarrow x_3=-1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1\,;\,1\}}}$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt. Mit doppelter Nullstelle.	f)	$(x+4)^2=2x+1$ $\Leftrightarrow x^2+8x+16=2x+1 \mid -2x-1$ $\Leftrightarrow x^2+6x+15=0$ $p=6\,;\,q=15$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-15=-6<0$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$ Bei negativer Diskriminante keine Lösung der quadratischen Gleichung.

A4 Aufgabe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form:

$ax^2 + bx + c = 0$ lautet $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$ als Diskriminante

Berechnen Sie jeweils die Diskriminante.

a)	$ax^2 + ax - 2 = 0\,;\, a \neq 0$	b)	$(a+1)x^2 - x + a = 0\,;\, a \neq -1$
c)	$\dfrac{a^2}{2}x^2 - 4x = x^2 - ax + 1;\, a \neq 0$	d)	$(ax)^2 - \sqrt{a}\cdot x + \dfrac{2}{a} = 0\,;\, a > 0$

A4 Ausführliche Lösung

a)

$$ax^2 + ax - 2 = 0\,;\, a \neq 0$$
$$a = a\,;\, b = a\,;\, c = -2$$
$$\Rightarrow D = b^2 - 4ac$$
$$= a^2 - 4a\cdot(-2)$$
$$= \underline{\underline{a^2 + 8a}}$$

b)

$$(a+1)x^2 - x + a = 0\,;\, a \neq -1$$
$$a = (a+1);\, b = -1;\, c = a$$
$$\Rightarrow D = b^2 - 4ac$$
$$= (-1)^2 - 4(a+1)\cdot a$$
$$= \underline{\underline{-4a^2 - 4a + 1}}$$

A4 Ausführliche Lösung

c)

$$\frac{a^2}{2}x^2 - 4x = x^2 - ax + 1;\, a \neq 0 \mid -x^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2}x^2 - x^2 - 4x = -ax + 1 \mid +ax$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)x^2 - 4x + ax = 1 \mid -1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)x^2 + (a-4)x - 1$$
$$a = \left(\frac{a^2}{2} - 1\right);\, b = (a-4);\, c = -1$$
$$\Rightarrow D = b^2 - 4ac = (a-4)^2 - 4\left(\frac{a^2}{2} - 1\right)\cdot(-1) = a^2 - 8a + 16 + 2a^2 - 4$$
$$= \underline{\underline{3a^2 - 8a + 12}}$$

A4	Ausführliche Lösung
	d) $(ax)^2 - \sqrt{a}\cdot x + \frac{2}{a} = 0\,;\, a > 0$ $\Leftrightarrow a^2x^2 - \sqrt{a}\cdot x + \frac{2}{a} = 0$ $a = a^2\,;\, b = -\sqrt{a}\,;\, c = \frac{2}{a}$ $\Rightarrow D = b^2 - 4ac = a - 4a^2\cdot\frac{2}{a} = a - 8a = \underline{\underline{-7a}}$

A5	**Aufgabe**
	Zeigen Sie, dass die Gleichung
	$x^2 + ax - 1 = 0$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ zwei Lösungen hat.

A5	Ausführliche Lösung
	$x^2 + ax - 1 = 0$ Zu zeigen ist, dass die Diskriminante für alle $a \in \mathbb{R} > 0$ ist. $p = a\,;\, q = -1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{a^2}{4} + 1 > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}$ $\underline{\underline{\Rightarrow L = \left\{ -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\,;\; -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+1} \right\}}}$

A6	**Aufgabe**			
	Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen in Abhängigkeit von a.			
	a)	$-ax^2+2ax-a+1=0\,;\,a>0$	b)	$x^2-2ax-6a=-3x$
	c)	$-ax^2+2a^2x+3a^3=0$	d)	$-x^2+1{,}5ax-0{,}5a^2=0$
	e)	$-\frac{1}{a}\left(x^2-5x\right)=0\,;\,a\neq 0$	f)	$\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}ax-a^2=0$

A6 Ausführliche Lösung

a)

$$-ax^2+2ax-a+1=0\,;\,a>0$$

$$-ax^2+2ax-a+1=0\,|:(-a)\Leftrightarrow x^2-2x+1-\frac{1}{a}=0$$

$$p=-2\,;\,q=1-\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1-\left(1-\frac{1}{a}\right)=1-1+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{a}}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l}x_1=1+\sqrt{\frac{1}{a}}\\ x_2=1-\sqrt{\frac{1}{a}}\end{array}\right.\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{1+\sqrt{\frac{1}{a}}\,;\,1-\sqrt{\frac{1}{a}}\right\}}}$$

A6 Ausführliche Lösung

b)

$$x^2-2ax-6a=-3x\,|+3x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2ax-6a+3x=0\Leftrightarrow x^2-2ax+3x-6a=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(2a-3)\cdot x-6a=0\Rightarrow p=-(2a-3)=3-2a\,;\,q=-6a$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{3-2a}{2}\right)^2+6a=\frac{9-12a+4a^2}{4}+6a$$

$$=\frac{9-12a+4a^2}{4}+\frac{24a}{4}=\frac{9-12a+4a^2+24a}{4}$$

$$=\frac{4a^2+12a+9}{4}=\frac{(2a+3)^2}{4}=\left(\frac{2a+3}{2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\left(\frac{2a+3}{2}\right)^2}=\frac{2a+3}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{2a-3}{2}+\frac{2a+3}{2}=\frac{2a-3+2a+3}{2}=\frac{4a}{2}=2a\\ x_2=\frac{2a-3}{2}-\frac{2a+3}{2}=\frac{2a-3-2a-3}{2}=\frac{-6}{2}=-3\end{array}\right.\Rightarrow\underline{\underline{L=\{-3\,;\,2a\}}}$$

A6 Ausführliche Lösung

c)

$$-ax^2 + 2a^2x + 3a^3 = 0 \,|:(-a)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3a^2 = 0 \Rightarrow p = -2a\,;\, q = -3a^2$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1 = a + 2a = 3a \\ x_2 = a - 2a = -a \end{array} \right. \Rightarrow L = \{-a\,;\,3a\}$$

A6 Ausführliche Lösung

d)

$$-x^2 + 1{,}5ax - 0{,}5a^2 = 0 \,|:(-1) \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}a^2 = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{3}{2}a\,;\, q = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{16}a^2 - \frac{8}{16}a^2 = \frac{1}{16}a^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{16}a^2} = \frac{1}{4}a$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}a = \frac{4}{4}a = a \\ x_2 = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}a = \frac{2}{4}a = \frac{1}{2}a \end{array} \right. \Rightarrow L = \left\{\frac{1}{2}a\,;\,a\right\}$$

A6 Ausführliche Lösung

e)

$$-\frac{1}{a}\left(x^2 - 5x\right) = 0\,;\, a \neq 0 \text{ x ausklammern}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{a}x(x-5) = 0 \text{ Den Satz vom Nullprodukt anwenden}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{a}x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \\ x - 5 = 0 \,|+5 \Leftrightarrow x_2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow L = \{0\,;\,5\}$$

A6 Ausführliche Lösung

f)

$$\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}ax - a^2 = 0 \,|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$$

$$\Rightarrow p = -2a\,;\, q = -3a^2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1 = a + 2a = 3a \\ x_2 = a - 2a = -a \end{array} \right. \Rightarrow L = \{-a\,;\,3a\}$$

A7	**Aufgabe**					
	Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen in Abhängigkeit von a.					
	a)	$2x^2+x-3a=0$	b)	$ax^2+2x-3=0$	c)	$x^2-ax+a=x$

A7 Ausführliche Lösung

a)

$$2x^2+x-3a=0\,|:2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}a=0$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{2};\ q=-\frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{16}+\frac{3}{2}a=\frac{1}{16}+\frac{24}{16}a=\frac{1}{16}(24a+1)$$

Da die Diskriminante von a abhängt, ist eine Fallunterscheidung durchzuführen.

Für $D>0$ gibt es 2 Lösungen

Die Bedingung für a ist dann:

$$D>0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}(24a+1)>0\,|\cdot 16$$
$$\Leftrightarrow 24a+1>0\,|-1$$
$$\Leftrightarrow 24a>-1\,|:24$$
$$\Leftrightarrow a>-\frac{1}{24}$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{16}(24a+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{24a+1}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\ \begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{24a+1} \\ x_2=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{24a+1}\end{array}\right. \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{24a+1};\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{24a+1}\right\}}}$$

Für $D=0$ gibt es 1 Lösung

Die Bedingung für a ist dann: $a=-\frac{1}{24} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{4}\right\}}}$

Für $D<0$ gibt es keine Lösung

Die Bedingung für a ist dann: $a<-\frac{1}{24} \Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$

A7 Ausführliche Lösung

b)

$$ax^2+2x-3=0\,|:a \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{a}x-\frac{3}{a}=0$$

$$\Rightarrow p=\frac{2}{a}\,;\,q=-\frac{3}{a}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{1}{a^2}+\frac{3a}{a^2}=\frac{1}{a^2}(3a+1)$$

Für $D>0$ gibt es 2 Lösungen

$$D>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}(3a+1)>0\,|\cdot a^2$$

$$\Leftrightarrow 3a+1>0\,|-1$$

$$\Leftrightarrow 3a>-1\,|:3$$

$$\Leftrightarrow a>-\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{a^2}(3a+1)}=\frac{1}{a}\sqrt{3a+1}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{3a+1} \\ x_2=-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\sqrt{3a+1}\end{array}\right. \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{3a+1}\,;\,-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\sqrt{3a+1}\right\}}}$$

Für $D=0$ gibt es 1 Lösung

Die Bedingung für a ist dann: $a=-\frac{1}{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{a} \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{a}\right\}}}$

Für $D<0$ gibt es keine Lösung

Die Bedingung für a ist dann: $a<-\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$

A7 Ausführliche Lösung

c) $x^2 - ax + a = x \mid -x \Leftrightarrow x^2 - ax - x + a = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (a+1)x + a = 0 \Rightarrow p = -(a+1)\,;\, q = a$

$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - a = \frac{a^2+2a+1}{4} - \frac{4a}{4} = \frac{a^2-2a+1}{4} = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$

Für $D > 0$ gibt es 2 Lösungen

$D > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 > 0$ Die Bedingung ist erfüllt für alle $a \neq 1$

$\sqrt{D} = \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2} = \frac{a-1}{2} = \frac{1}{2}(a-1)$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(a+1) + \frac{1}{2}(a-1) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = a \\ x_2 = \frac{1}{2}(a+1) - \frac{1}{2}(a-1) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{L = \{a\,;1\}}}$$

Für $D = 0$ gibt es 1 Lösung

Die Bedingung für a ist dann:

$a = 1 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} = \frac{1}{2}(a+1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{L = \{1\}}}$

Diese Lösung ist bereits in der Lösung für D > 0 enthalten.

A8 **Aufgabe**

Zeigen Sie

$L = \left\{1+\sqrt{2-3k}\,;1-\sqrt{2-3k}\right\}$ sind für $k \leq \frac{2}{3}$ Lösungen von $x^2 - 2x + 3k - 1 = 0$

A8 Ausführliche Lösung

$x^2 - 2x + 3k - 1 = 0$

Zu zeigen ist, dass für $k \leq \frac{2}{3}$ $L = \left\{1+\sqrt{2-3k}\,;1-\sqrt{2-3k}\right\}$ gilt.

$p = -2\,;\, q = 3k - 1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - (3k-1) = 1 - 3k + 1 = 2 - 3k$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 1 \pm \sqrt{2-3k}$

Da der Radikant $D \geq 0$ sein muss, ist zu prüfen,
für welche Werte von k das der Fall ist.

$D \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 3k \geq 0 \mid -2 \Leftrightarrow -3k \geq -2 \mid :(-3) \Leftrightarrow k \leq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{1+\sqrt{2-3k}\,;\; 1-\sqrt{2-3k}\right\} \text{ für } k \leq \frac{2}{3}}}$

A9	**Aufgabe**
	Für welche Werte von k ist $x = k$ Lösung von $x^2 - 5x + k = 0$

A9	Ausführliche Lösung
	$x^2 - 5x + k = 0 \quad x = k$ wird in die Gleichung eingesetzt: $k^2 - 5k + k = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k = 0$ $\Leftrightarrow k(k-4) = 0$ Satz vom Nullprodukt anwenden $\Rightarrow k_1 = 0 \qquad k - 4 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 4$ $\Rightarrow L = \{0;\ 4\}$ für $x = k$

A10	**Aufgabe**
	Zeigen Sie: $x^2 - 2x - k^2 = 0$ hat für alle $k \in \mathbb{R}$ zwei Lösungen.

A10	Ausführliche Lösung
	$x^2 - 2x - k^2 = 0 \Rightarrow p = -2\,;\, q = -k^2$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + k^2 = k^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{k^2+1} > 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$ Die Lösungen sind: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\Big\vert\; x_1 = 1 + \sqrt{k^2+1},\; x_2 = 1 - \sqrt{k^2+1} \Rightarrow L = \left\{1 + \sqrt{k^2+1};\ 1 - \sqrt{k^2+1}\right\}$ für alle $k \in \mathbb{R}$