

Lösungen Potenzen VII (Polynomdivision)**Ergebnisse:**

E1	Ergebnisse
a)	$(6a^6 + a^4b + 25b^3) : (3a^2 + 5b) = 2a^4 - 3a^2b + 5b^2$
b)	$(15a^9 - 8a^6b + 8b^3) : (3a^3 + 2b) = 5a^6 - 6a^3b + 4b^2$
c)	$(14a^4 - a^3 + 5a^2 - 3a + 1) : (7a^2 - 4a + 1) = 2a^2 + a + 1$

E2	Ergebnisse
a)	$(a^5 + a^4 - 8a^3 + 26a^2 - 29a + 21) : (a^2 - 2a + 3) = a^3 + 3a^2 - 5a + 7$
b)	$(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3) : (a - b) = a^2 - ab + b^2$
c)	$(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) : (a + b) = a^2 + ab + b^2$

E3	Ergebnisse
a)	$\frac{3x^5y^{n+2} + 3x^2y^{3n+2} - 2x^{m+3}y^{n+3} - 2x^my^{3n+3}}{x^3 + y^{2n}} = 3x^2y^{n+2} - 2x^my^{n+3}$
b)	$\frac{48a^{n+x} + 56a^xb^x - 72a^nb^c - 84b^{x+c}}{12a^n + 14b^x} = 4a^x - 6b^c$
c)	$\frac{8a^{2n+1} - 10a^{2n}b + 15a^{3n-2}b - 12a^{3n-1}}{2a^{2n} - 3a^{3n-2}} = 4a - 5b$

E4	Ergebnisse
a)	$\frac{2a^5b^{x+2} - 2a^3b^{x+5} + 3a^4b^{2x-1} - 3a^2b^{2x+2}}{a^2 - b^3} = 2a^3b^{x+2} + 3a^2b^{2x-1}$
b)	$\frac{24a^{c+x} + 28a^xb^x - 36a^cb^r - 42b^{x+r}}{6a^c + 7b^x} = 4a^x - 6b^r$
c)	$\frac{24a^{m+1}b^{m+2} - 28a^mb^{m+3} - 6a^{m+3}b^m + 7a^{m+2}b^{m+1}}{4a^mb^{m+2} - a^{m+2}b^m} = 6a - 7b$

E5	Ergebnisse				
a)	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \frac{1}{64}$	b)	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \frac{1}{64}$	c)	$\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^4d^{-5}}\right)^{-3} = \frac{a^6c^{12}}{b^9d^{15}}$
d)	$\left(\frac{a^0b^{-2}}{c^3d^{-4}}\right)^{-2} = \frac{b^4c^6}{d^8}$	e)	$\frac{\left[(-a)^2\right]^{2n} \cdot a^6}{a^4} = a^{4n+2}$	f)	$\frac{\left[(-a^m)^2\right]^3}{a^{4m}} = a^{2m}$

E6 Ergebnisse	
a)	$(5x^{-1}y^2z) \cdot \frac{(2x^2y)^4}{(3yz^3)^8} = \frac{5 \cdot 3^8 y^6 z^{25}}{16x^9}$
b)	$\left(\frac{x^7}{y^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4 = x^{19}$

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Zwischen der Polynomdivision und dem schriftlichen dividieren besteht ein Zusammenhang. Folgende Gegenüberstellung soll das im Falle einer Division ohne Rest zeigen.

$ \begin{array}{r} 62228 : 47 = 1324 \\ \underline{-47} \\ 152 \\ \underline{-141} \\ 112 \\ \underline{-94} \\ 188 \\ \underline{-188} \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 12) : (x - 4) = x^2 - 2x + 3 \\ \underline{-(x^3 - 4x^2)} \\ -2x^2 + 11x \\ \underline{-(-2x^2 + 8x)} \\ 3x - 12 \\ \underline{-(3x - 12)} \\ 0 \end{array} $
<p>Die Zahl 62, bestehend aus den ersten zwei Ziffern der zu teilenden Zahl wird durch den Teiler (47) dividiert.</p> <p>Das Ergebnis (1) wird mit dem Teiler 47 multipliziert und von der Zahl (62) subtrahiert.</p> <p>Mit dem Ergebnis der Subtraktion (152) verfährt man in gleicher Weise. Man führt dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.</p> <p>Probe: $47 \cdot 1324 = 62228$</p>	<p>Der erste Summand des zu teilenden Polynoms (x^3) wird durch den ersten Summanden des Teilers (x) dividiert.</p> <p>Das Ergebnis (x^2) wird mit dem Teiler ($x - 4$) multipliziert und von dem zu teilenden Polynom subtrahiert.</p> <p>Mit dem Ergebnis der Subtraktion ($-2x^2 + 11x - 12$) Verfährt man in gleicher Weise. Man führt dieses Verfahren so lange durch, bis das Subtraktionsergebnis Null ist.</p> <p>Probe: $(x - 4) \cdot (x^2 - 2x + 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 12$</p>

Da gerade Anfänger bei der Durchführung der Polynomdivision immer wieder Fehler machen, ist es wichtig das erhaltene Ergebnis durch eine Proberechnung zu kontrollieren.

Im Zusammenhang von ganzzahligen Funktionen verwendet man oft die Polynomdivision zum Auffinden der Nullstellen.

Ist von einem Polynom eine Nullstelle bekannt, so kann der Grad des Polynoms um eins reduziert werden. Das vereinfacht oft die Rechnung sehr.

Ausführliche Lösungen :

A1	Aufgabe
	Berechnen Sie die folgenden Terme
	a) $(6a^6 + a^4b + 25b^3) : (3a^2 + 5b)$
	b) $(15a^9 - 8a^6b + 8b^3) : (3a^3 + 2b)$
c) $(14a^4 - a^3 + 5a^2 - 3a + 1) : (7a^2 - 4a + 1)$	

A1	Ausführliche Lösung
a)	$\begin{array}{r} (6a^6 + a^4b + 25b^3) : (3a^2 + 5b) = \underline{\underline{2a^4 - 3a^2b + 5b^2}} \\ -(6a^6 + 10a^4b) \\ \hline -9a^4b \\ -(-9a^4b - 15a^2b^2) \\ \hline 15a^2b^2 + 25b^3 \\ -(15a^2b^2 + 25b^3) \\ \hline \end{array}$ <p>In manchen Fällen ist es sinnvoll, bei der Schreibweise der Terme eine Lücke zu lassen. Eine andere Möglichkeit ist, die Lücke mit Null zu füllen.</p>

A1	Ausführliche Lösung
b)	$\begin{array}{r} (15a^9 - 8a^6b + 8b^3) : (3a^3 + 2b) = \underline{\underline{5a^6 - 6a^3b + 4b^2}} \\ -(15a^9 + 10a^6b) \\ \hline -18a^6b \\ -(-18a^6b - 12a^3b^2) \\ \hline -12a^3b^2 + 8b^3 \\ -(12a^3b^2 + 8b^3) \\ \hline \end{array}$

A1	Ausführliche Lösung
c)	$(14a^4 - a^3 + 5a^2 - 3a + 1) : (7a^2 - 4a + 1) = \underline{\underline{2a^2 + a + 1}}$ $\begin{array}{r} \underline{-(14a^4 - 8a^3 + 2a^2)} \\ 7a^3 + 3a^2 - 3a \\ \underline{-(7a^3 - 4a^2 + a)} \\ 7a^2 - 4a + 1 \\ \underline{-(7a^2 - 4a + 1)} \end{array}$

A2	Aufgabe
	Berechnen Sie die folgenden Terme
a)	$(a^5 + a^4 - 8a^3 + 26a^2 - 29a + 21) : (a^2 - 2a + 3)$
b)	$(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3) : (a - b)$
c)	$(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) : (a + b)$

A2	Ausführliche Lösung
a)	$(a^5 + a^4 - 8a^3 + 26a^2 - 29a + 21) : (a^2 - 2a + 3) = \underline{\underline{a^3 + 3a^2 - 5a + 7}}$ $\begin{array}{r} \underline{-(a^5 - 2a^4 + 3a^3)} \\ 3a^4 - 11a^3 + 26a^2 \\ \underline{-(3a^4 - 6a^3 + 9a^2)} \\ -5a^3 + 17a^2 - 29a \\ \underline{-(-5a^3 + 10a^2 - 15a)} \\ 7a^2 - 14a + 21 \\ \underline{-(7a^2 - 14a + 21)} \end{array}$

A2	Ausführliche Lösung
b)	$(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3) : (a - b) = \underline{\underline{a^2 - ab + b^2}}$ $\begin{array}{r} \underline{-(a^3 - a^2b)} \\ -a^2b + 2ab^2 \\ \underline{-(-a^2b + ab^2)} \\ ab^2 - b^3 \\ \underline{-(ab^2 - b^3)} \end{array}$

A2	Ausführliche Lösung
c)	$(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) : (a + b) = \underline{\underline{a^2 + ab + b^2}}$ $\begin{array}{r} \underline{-(a^3 + a^2b)} \\ a^2b + 2ab^2 \\ \underline{-(a^2b + ab^2)} \\ ab^2 + b^3 \\ \underline{-(ab^2 + b^3)} \end{array}$

A3	Aufgabe
	Berechnen Sie die folgenden Terme
a)	$\frac{3x^5y^{n+2} + 3x^2y^{3n+2} - 2x^{m+3}y^{n+3} - 2x^my^{3n+3}}{x^3 + y^{2n}}$
b)	$\frac{48a^{n+x} + 56a^xb^x - 72a^nb^c - 84b^{x+c}}{12a^n + 14b^x}$
c)	$\frac{8a^{2n+1} - 10a^{2n}b + 15a^{3n-2}b - 12a^{3n-1}}{2a^{2n} - 3a^{3n-2}}$

A3	Ausführliche Lösung
a)	$(3x^5y^{n+2} + 3x^2y^{3n+2} - 2x^{m+3}y^{n+3} - 2x^my^{3n+3}) : (x^3 + y^{2n}) = \underline{\underline{3x^2y^{n+2} - 2x^my^{n+3}}}$ $\begin{array}{r} \underline{-(3x^5y^{n+2} + 3x^2y^{3n+2})} \\ -2x^{m+3}y^{n+3} - 2x^my^{3n+3} \\ \underline{-(-2x^{m+3}y^{n+3} - 2x^my^{3n+3})} \end{array}$

A3	Ausführliche Lösung
b)	$\begin{array}{r} (48a^{n+x} + 56a^x b^x - 72a^n b^c - 84b^{x+c}) : (12a^n + 14b^x) = \underline{\underline{4a^x - 6b^c}} \\ -(48a^{n+x} + 56a^x b^x) \\ \hline -72a^n b^c - 84b^{x+c} \\ -(-72a^n b^c - 84b^{x+c}) \end{array}$

A3	Ausführliche Lösung
c)	$\begin{array}{r} (8a^{2n+1} - 10a^{2n} b + 15a^{3n-2} b - 12a^{3n-1}) : (2a^{2n} - 3a^{3n-2}) = \underline{\underline{4a - 5b}} \\ -(8a^{2n+1} \qquad \qquad \qquad -12a^{3n-1}) \\ \hline -10a^{2n} b + 15a^{3n-2} b \\ -(-10a^{2n} b + 15a^{3n-2} b) \end{array}$

A4	Aufgabe
Berechnen Sie die folgenden Terme	
a)	$\frac{2a^5 b^{x+2} - 2a^3 b^{x+5} + 3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2}}{a^2 - b^3}$
b)	$\frac{24a^{c+x} + 28a^x b^x - 36a^c b^r - 42b^{x+r}}{6a^c + 7b^x}$
c)	$\frac{24a^{m+1} b^{m+2} - 28a^m b^{m+3} - 6a^{m+3} b^m + 7a^{m+2} b^{m+1}}{4a^m b^{m+2} - a^{m+2} b^m}$

A4	Ausführliche Lösung
a)	$\begin{array}{r} (2a^5 b^{x+2} - 2a^3 b^{x+5} + 3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2}) : (a^2 - b^3) = \underline{\underline{2a^3 b^{x+2} + 3a^2 b^{2x-1}}} \\ -(2a^5 b^{x+2} - 2a^3 b^{x+5}) \\ \hline 3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2} \\ - (3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2}) \end{array}$

A4	Ausführliche Lösung
b)	$\begin{array}{r} (24a^{c+x} + 28a^x b^x - 36a^c b^r - 42b^{x+r}) : (6a^c + 7b^x) = \underline{\underline{4a^x - 6b^r}} \\ -(24a^{c+x} + 28a^x b^x) \\ \hline -36a^c b^r - 42b^{x+r} \\ -(-36a^c b^r - 42b^{x+r}) \end{array}$

A4	Ausführliche Lösung
c)	$(24a^{m+1}b^{m+2} - 28a^m b^{m+3} - 6a^{m+3}b^m + 7a^{m+2}b^{m+1}) : (4a^m b^{m+2} - a^{m+2}b^m) = \underline{\underline{6a - 7b}}$ $\begin{array}{r} -(24a^{m+1}b^{m+2} \qquad \qquad - 6a^{m+3}b^m) \\ \hline \qquad - 28a^m b^{m+3} \qquad \qquad + 7a^{m+2}b^{m+1} \\ -(-28a^m b^{m+3} \qquad \qquad + 7a^{m+2}b^{m+1}) \end{array}$

A5	Aufgabe				
Berechnen Sie die folgenden Terme					
a)	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$	b)	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$	c)	$\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^4d^{-5}}\right)^{-3}$
d)	$\left(\frac{a^0b^{-2}}{c^3d^{-4}}\right)^{-2}$	e)	$\frac{\left[(-a)^2\right]^{2n} \cdot a^6}{a^4}$	f)	$\left[(-a^m)^2\right]^3$ a^{4m}

A5	Ausführliche Lösungen		
a)	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 3}$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $= \frac{1^6}{2^6} = \underline{\underline{\frac{1}{64}}}$	b)	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2}$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $= \frac{1^6}{2^6} = \underline{\underline{\frac{1}{64}}}$

A5	Ausführliche Lösungen		
c)	$\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^4d^{-5}}\right)^{-3} = \frac{a^{-2 \cdot (-3)} \cdot b^{3 \cdot (-3)}}{c^{4 \cdot (-3)} \cdot d^{-5 \cdot (-3)}}$ $= \frac{a^6 b^{-9}}{c^{-12} d^{15}}$ $= \frac{a^6 c^{12}}{b^9 d^{15}}$	d)	$\left(\frac{a^0 b^{-2}}{c^3 d^{-4}}\right)^{-2} = \frac{a^{0 \cdot (-2)} \cdot b^{-2 \cdot (-2)}}{c^{3 \cdot (-2)} \cdot d^{-4 \cdot (-2)}}$ $= \frac{a^0 b^4}{c^{-6} \cdot d^8}$ $= \frac{b^4 c^6}{d^8}$

A5 Ausführliche Lösungen	
e)	$\frac{[(-a)^2]^{2n} \cdot a^6}{a^4} = \frac{[a^2]^{2n} \cdot a^6}{a^4}$ $= \frac{a^{2 \cdot 2n} \cdot a^6}{a^4}$ $= a^{4n} \cdot a^6 \cdot a^{-4}$ $= \underline{\underline{a^{4n+2}}}$
f)	$\frac{[(-a^m)^2]^{-3}}{a^{4m}} = \frac{[a^{2m}]^3}{a^{4m}}$ $= \frac{a^{2 \cdot 3m}}{a^{4m}}$ $= a^{6m-4m}$ $= \underline{\underline{a^{2m}}}$

A6 Aufgabe	
Berechnen Sie die folgenden Terme	
a)	b)
$(5x^{-1}y^2z) : \frac{(2x^2y)^4}{(3yz^3)^8}$	$\left(\frac{x^7}{y^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4$

A6 Ausführliche Lösungen	
a)	b)
$(5x^{-1}y^2z) : \frac{(2x^2y)^4}{(3yz^3)^8}$ $= \frac{5x^{-1}y^2z \cdot (3yz^3)^8}{(2x^2y)^4}$ $= \frac{5x^{-1}y^2z \cdot 3^8 \cdot y^8 \cdot z^{24}}{2^4 \cdot x^8 \cdot y^4}$ $= \frac{5 \cdot 3^8 x^{-1} y^{10} z^{25}}{2^4 \cdot x^8 \cdot y^4}$ $= \underline{\underline{\frac{5 \cdot 3^8 y^6 z^{25}}{2^4 x^9}}}$	$\left(\frac{x^7}{y^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4 = \frac{x^7}{y^4} \cdot (y \cdot x^3)^4$ $= \frac{x^7 \cdot y^4 \cdot x^{12}}{y^4}$ $= \frac{x^7 \cdot \cancel{y^4} \cdot x^{12}}{\cancel{y^4}}$ $= \underline{\underline{x^{19}}}$