Lösungen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen II

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \frac{e^x}{4}(2-e)$
	b)	$2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x$
	c)	$x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n = x^n(x-3)^2$

E2	Ergebnisse	
	a)	$e^x - e^{3x} = e^x\left(1-e^{2x}\right)$
	b)	$e^{2x} - 1 = \left(e^x - 1\right)\left(e^x + 1\right)$
	c)	$x^2e^x + 2xe^x + e^x = e^x(x+1)^2$
	d)	$a^n + a^{4-n} + a^{2n} = a^{2n}\left(a^{-n} + a^{4-3n} + 1\right)$
	e)	$e^{3x} - 2e^{-x} = e^{-x}\left(e^{4x} - 2\right)$
	f)	$ke^{2x} - 2e^{x+1} = e^x\left(ke^x - 2e\right)$

E3	Ergebnisse	
	a)	$\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$
	b)	$\left(e^x - e^{-x} + 5\right)e^x = e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1$
	c)	$2^x\left(2^{-1} + 2^x\right) = 2^x\left(2^{-1} + 2^x\right)$

E4	Ergebnisse				
a)	$\frac{1}{4} \cdot 2^4 \cdot \left(2^2\right)^3 = 256 = 2^8$	b)	$-\left(x^4 - 2\right)^2 = -x^8 + 4x^4 - 4$	c)	$\frac{e^{3x} + e^{2x}}{e^{2x}} = e^x + 1$
d)	$128 \cdot 2^{n-7} = 2^n$	e)	$243 \cdot 3^{n-5} = 3^n$	f)	$\frac{3^{2n+4}}{81} = 3^{2n}$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt[3]{\sqrt{216}} = \sqrt{6}$	b)	$\sqrt[4]{625a^3 \cdot \sqrt[3]{4^6 \cdot a \cdot \sqrt{a^4}}} = 10a$
	c)	$\sqrt[5]{x^{10} \cdot y^5 \cdot z^{15}} = x^2 \cdot y \cdot z^3$	d)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[3]{a^2}$
	e)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[12]{x} = x^2$	f)	$\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{\frac{5a+5b}{a-b}} = \sqrt{5}(a+b)$

E6	Ergebnisse					
	a)	$\frac{\ln(2)}{3}-1\approx -0,768950$	b)	$\frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}\approx 1,58496$	c)	$\ln\left(\frac{2}{e}\right)-1\approx -1,30685$

E7	Ergebnisse					
	a)	$\left(k-e^{\ln(2k)}\right)^2=k^2$	b)	$\ln\left(\sqrt{e^{2k}}\right)=k$	c)	$e^{\ln(2k)}-2ke^{\ln(2)}=-2k$

E8	Ergebnisse			
	a)	$\log\left(\sqrt{2xy}\right)=\frac{1}{2}\left[\log(2)+\log(x)+\log(y)\right]$	b)	$\ln(u)+2\ln(v)=\ln\left(uv^2\right)$
	c)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right)=\lg(u)$	d)	$\lg(x)-\lg(y)+\frac{1}{2}\lg(z)=\lg\left(\frac{x\sqrt{z}}{y}\right)$
	e)	$\ln(e)^2-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=3\ln(2)-1$	f)	$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$

Potenz- Wurzel- und Logarithmengesetze

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$a^0=1$	$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$	$\sqrt{a^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$

Logarithmus zur Basis 10 (Zehner- oder dekadischer Logarithmus) [LOG]-Taste

$x=\lg(b)\Leftrightarrow 10^x=b$	$\lg(b\cdot c)=\lg(b)+\lg(c)$
$\lg\left(\frac{b}{c}\right)=\lg(b)-\lg(c)$	$\lg\left(b^c\right)=c\cdot\lg(b)$
$\lg(10)=1$ $\quad\lg(1)=0$	$b=10^{\lg(b)}$ $\quad b^x=10^{x\cdot\lg(b)}$

Logarithmus zur Basis e (Natürlicher Logarithmus oder Logarithmus Naturalis)

$x=\ln(b)\Leftrightarrow e^x=b$	$\ln(b\cdot c)=\ln(b)+\ln(c)$
$\ln\left(\frac{b}{c}\right)=\ln(b)-\ln(c)$	$\ln\left(b^c\right)=c\cdot\ln(b)$
$\ln(e)=1$ $\quad\ln(1)=0$	$b=e^{\ln(b)}$ $\quad b^x=e^{x\cdot\ln(b)}$

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$\log_a(b)=\frac{\lg(b)}{\lg(a)}=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\log_3(5)=\frac{\lg(5)}{\lg(3)}=\frac{\ln(5)}{\ln(3)}\approx 1,4649735$

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**					
	Bestimmen Sie den Klammerausdruck.					
	a)	$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \frac{e^x}{4}\cdot(...)$	b)	$2^x + 2^{x+1} = 2^x\cdot(...)$	c)	$x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n = x^n\cdot(...)$

A1	Ausführliche Lösungen.	
	Hinweis: Ein Faktor wird aus einer Summe ausgeklammert, indem jeder Summand durch diesen Faktor dividiert wird. Zur Probe sollte man nach dem Ausklammern das Produkt bilden, so dass wieder der Ausgangsterm entsteht. In den meisten Fällen lässt sich die Probe durch Kopfrechnung durchführen.	
	a)	$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \frac{e^x}{4}\cdot(...)$ $\quad \frac{e^x}{2} : \frac{e^x}{4} = \frac{4\cdot e^x}{2\cdot e^x} = 2$ $\quad \frac{1\cdot e^{x+1}}{4} : \frac{e^x}{4} = \frac{4\cdot e^{x+1}}{4\cdot e^x} = e$ $\Rightarrow \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \underline{\underline{\frac{e^x}{4}\cdot(2-e)}}$ $\quad$ Probe: $\frac{e^x}{4}\cdot 2 - \frac{e^x}{4}\cdot e = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1}$
	b)	$2^x + 2^{x+1} = 2^x\cdot(...)$ $\quad \frac{2^x}{2^x} = 1$ $\quad \frac{2^{x+1}}{2^x} = 2$ $\Rightarrow 2^x + 2^{x+1} = 2^x\cdot(1+2) = 2^x\cdot 3 = \underline{\underline{3\cdot 2^x}}$
	c)	$x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n = x^n\cdot(...)$ $\quad \frac{x^{n+2}}{x^n} = x^2$ $\quad \frac{6x^{n+1}}{x^n} = 6x$ $\quad \frac{9x^n}{x^n} = 9$ $\Rightarrow x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n = x^n\cdot\underbrace{(x^2 - 6x + 9)}_{\text{2. bin. Formel}} = \underline{\underline{x^n(x-3)^2}}$

A2	**Aufgabe**					
	Bestimmen Sie den Klammerausdruck.					
	a)	$e^x - e^{3x} = e^x\cdot(...)$	b)	$e^{2x} - 1 = (e^x - 1)\cdot(...)$	c)	$x^2e^x + 2xe^x + e^x = e^x\cdot(...)$
	d)	$a^n + a^{4-n} + a^{2n} = a^{2n}(...)$	e)	$e^{3x} - 2e^{-x} = e^{-x}(...)$	f)	$ke^{2x} - 2e^{x+1} = e^x(...)$

A2	Ausführliche Lösungen	
	a)	$e^x - e^{3x} = e^x \cdot (...) \qquad \frac{e^x}{e^x} = 1 \qquad \frac{e^{3x}}{e^x} = e^{2x}$ $\Rightarrow e^x - e^{3x} = \underline{\underline{e^x \cdot (1 - e^{2x})}}$
	b)	$e^{2x} - 1 = (e^x - 1) \cdot (...) \qquad \underbrace{e^{2x} - 1}_{\text{3. bin. Formel}} = \underline{\underline{(e^x - 1)(e^x + 1)}}$
	c)	$x^2e^x + 2xe^x + e^x = e^x \cdot (...)$ $\Rightarrow x^2e^x + 2xe^x + e^x = e^x \cdot \underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{\text{1. bin. Formel}} = \underline{\underline{e^x (x+1)^2}}$
	d)	$a^n + a^{4-n} + a^{2n} = a^{2n}(...) \qquad \frac{a^n}{a^{2n}} = a^{-n} \qquad \frac{a^{4-n}}{a^{2n}} = a^{4-3n} \qquad \frac{a^{2n}}{a^{2n}} = 1$ $\Rightarrow a^n + a^{4-n} + a^{2n} = \underline{\underline{a^{2n}(a^{-n} + a^{4-3n} + 1)}}$
	e)	$e^{3x} - 2e^{-x} = e^{-x}(...) \qquad \frac{e^{3x}}{e^{-x}} = e^{4x} \qquad \frac{2e^{-x}}{e^{-x}} = 2$ $\Rightarrow e^{3x} - 2e^{-x} = \underline{\underline{e^{-x}(e^{4x} - 2)}}$
	f)	$ke^{2x} - 2e^{x+1} = e^x(...) \qquad \frac{ke^{2x}}{e^x} = k \cdot e^x \qquad \frac{2e^{x+1}}{e^x} = 2e^1 = 2e$ $\Rightarrow ke^{2x} - 2e^{x+1} = \underline{\underline{e^x(k \cdot e^x - 2e)}}$

A3	**Aufgabe**					
	Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie.					
	a)	$(e^x + e^{-x})^2$	b)	$(e^x - e^{-x} + 5)e^x$	c)	$2^x(2^{-1} + 2^x)$

A3	Ausführliche Lösungen	
	a)	$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x} = \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x} + 2}}$
	b)	$(e^x - e^{-x} + 5)e^x = e^{2x} - e^{-x} \cdot e^x + 5 \cdot e^x = e^{2x} - 1 + 5 \cdot e^x = \underline{\underline{e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1}}$
	c)	$2^x(2^{-1} + 2^x) = \underline{\underline{2^{x-1} + 2^{2x}}}$

A4	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie.					
	a)	$\frac{1}{4} \cdot 2^4 \cdot (2^2)^3$	b)	$-(x^4 - 2)^2$	c)	$\frac{e^{3x} + e^{2x}}{e^{2x}}$
	d)	$128 \cdot 2^{n-7}$	e)	$243 \cdot 3^{n-5}$	f)	$\frac{3^{2n+4}}{81}$

A4	Ausführliche Lösungen
a)	$\frac{1}{4}\cdot 2^4\cdot\left(2^2\right)^3=\frac{1}{2^2}\cdot 2^4\cdot 2^6=2^4\cdot 2^6\cdot 2^{-2}=\underline{\underline{2^8}}$
b)	$-\left(x^4-2\right)^2=-\left[x^8-4x^4+4\right]=\underline{\underline{-x^8+4x^4-4}}$
c)	$\frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^{2x}}=\frac{e^{3x}}{e^{2x}}+\frac{e^{2x}}{e^{2x}}=\underline{\underline{e^x+1}}$
d)	$128\cdot 2^{n-7}=2^7\cdot 2^{n-7}=2^{n-7+7}=\underline{\underline{2^n}}$
e)	$243\cdot 3^{n-5}=3^5\cdot 3^{n-5}=3^{n-5+5}=\underline{\underline{3^n}}$
f)	$\frac{3^{2n+4}}{81}=\frac{3^{2n+4}}{3^4}=3^{2n+4-4}=\underline{\underline{3^{2n}}}$

A5	**Aufgabe**				
	Berechnen Sie folgende Terme. Verwandeln Sie bei Bedarf Wurzeln in Potenzen mit gebrochenem Exponenten.				
	Beispiel 1: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	Beispiel 2: $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt{bc}}=\sqrt[4]{a\cdot(bc)^{\frac{1}{2}}}=\left[a\cdot(bc)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{4}}$			
a)	$\sqrt[3]{\sqrt{216}}$	b)	$\sqrt[4]{625a^3\cdot\sqrt[3]{4^6\cdot a\cdot\sqrt{a^4}}}$	c)	$\sqrt[5]{x^{10}\cdot y^5\cdot z^{15}}$
d)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}$	e)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}\cdot\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[12]{x}$	f)	$\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{5a+5b}{a-b}}$

A5	Ausführliche Lösungen Hinweis: Verwandeln Sie bei Bedarf Wurzeln in Potenzen mit gebrochenem Exponenten.
a)	$\sqrt[3]{\sqrt{216}} = \sqrt[3]{216^{\frac{1}{2}}} = \left(216^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(216^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(6^{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$
b)	$\sqrt[4]{625a^3 \cdot \sqrt[3]{4^6 \cdot a \cdot \sqrt{a^4}}} = \sqrt[4]{5^4 \cdot a^3 \cdot \sqrt[3]{2^{12} \cdot a \cdot a^2}} = \sqrt[4]{5^4 \cdot a^3 \cdot a \cdot \sqrt[3]{2^{12}}}$ $= \sqrt[4]{5^4 \cdot a^4 \cdot 2^{\frac{12}{3}}} = \left(5^4 \cdot a^4 \cdot 2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 5 \cdot a \cdot 2 = \underline{\underline{10a}}$
c)	$\sqrt[5]{x^{10} \cdot y^5 \cdot z^{15}} = \left(x^{10} \cdot y^5 \cdot z^{15}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{10}{5}} \cdot y^{\frac{5}{5}} \cdot z^{\frac{15}{5}} = \underline{\underline{x^2 \cdot y \cdot z^3}}$
d)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[4]{a^{\frac{8}{3}}} = \left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{a^2}}}$
e)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[12]{x} = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{1}{12}}$ $= x^{\frac{4}{12}} \cdot x^{\frac{3}{12}} \cdot x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{4}{12}} \cdot x^{\frac{3}{12}} \cdot x^{\frac{16}{12}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{16}{12}+\frac{1}{12}} = x^{\frac{24}{12}} = \underline{\underline{x^2}}$
f)	$\sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{\frac{5a+5b}{a-b}} = \sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)(5a+5b)}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)\cdot 5\cdot(a+b)}{a-b}}$ $= \sqrt{5(a+b)^2} = (a+b)\cdot\sqrt{5} = \underline{\underline{\sqrt{5}(a+b)}}$

A6	**Aufgabe**				
	Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen.				
a)	$\frac{\ln(2)}{3} - 1$	b)	$\frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}$	c)	$\ln\left(\frac{2}{e}\right) - 1$

A6	Ausführliche Lösungen
a)	$\frac{\ln(2)}{3} - 1 \approx \underline{\underline{-0{,}76895}}$
b)	$\frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{\ln(3)^{\frac{1}{2}}}{\ln(2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\ln(3)}{\frac{1}{2}\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx \underline{\underline{1{,}58496}}$
c)	$\ln\left(\frac{2}{e}\right) - 1 = \ln(2) - \ln(e) - 1 = \ln(2) - 1 - 1 = \ln(2) - 2 \approx \underline{\underline{-1{,}30685}}$

A7	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie.					
	a)	$\left(k-e^{\ln(2k)}\right)^2$	b)	$\ln\left(\sqrt{e^{2k}}\right)$	c)	$e^{\ln(2k)}-2ke^{\ln(2)}$

A7	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\left(k-e^{\ln 2k}\right)^2$ aus $e^{\ln(a)}=a$ folgt $e^{\ln(2k)}=2k$ $\Rightarrow\left(k-e^{\ln(2k)}\right)^2=(k-2k)^2=(-k)^2=\underline{\underline{k^2}}$
	b)	$\ln\left(\sqrt{e^{2k}}\right)=\ln\left(e^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln(e)^k=k\cdot\ln(e)=\underline{\underline{k}}$
	c)	$e^{\ln(2k)}-2ke^{\ln(2)}=2k-2k\cdot 2=2k-4k=\underline{\underline{-2k}}$

A8	**Aufgabe**					
	Formen Sie um.					
	a)	$\log\left(\sqrt{2xy}\right)$	b)	$\ln(u)+2\ln(v)$	c)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right)$
	d)	$\lg(x)-\lg(y)+\frac{1}{2}\lg(z)$	e)	$\ln(e)^2-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$	f)	$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

A8	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\log\left(\sqrt{2xy}\right)=\log(2xy)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log(2xy)=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left[\log(2)+\log(x)+\log(y)\right]}}$
	b)	$\ln(u)+2\ln(v)=\ln(u)+\ln(v)^2=\underline{\underline{\ln\left(uv^2\right)}}$
	c)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right)=-\lg(u)^{-1}=-(-1)\cdot\lg(u)=\underline{\underline{\lg u}}$
	d)	$\lg x-\lg y+\frac{1}{2}\lg z=\lg x-\lg y+\lg\sqrt{z}=\underline{\underline{\lg\left(\frac{x\cdot\sqrt{z}}{y}\right)}}$
	e)	$\ln(e)^2-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=2\cdot\ln(e)-3\left[\ln(e)-\ln(2)\right]$ $=2-3+3\cdot\ln(2)=-1+3\cdot\ln(2)=\underline{\underline{3\cdot\ln(2)-1}}$
	f)	$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\underline{\underline{\ln(1-x)-\ln(1+x)}}$