Lösungen Potenzen und Wurzeln VI

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\sqrt{4}-\sqrt{8}+3\sqrt{18}=2+7\sqrt{2}$
	b)	$2\sqrt{3}-\sqrt{27}+4\sqrt{9}=12-\sqrt{3}$
	c)	$4\left(\sqrt{2}\right)^3-5\sqrt{2}+\sqrt{18}=6\sqrt{2}$

E2	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{(a+b)^3}=(a+b)^2$	b)	$\sqrt{3(x-y)}\cdot\sqrt{27(x-y)}=9(x-y)$
	c)	$\sqrt{\frac{2}{3x+7y}}\cdot\sqrt{\frac{7y+3x}{2}}=1$	d)	$\sqrt{\frac{1}{14x}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{7}}\cdot\sqrt{\frac{8x^4}{98}}=\frac{2}{49}x^2$

E3	Ergebnisse	
	a)	$2\sqrt{75}-4\sqrt{12}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
	b)	$(2x+y)\sqrt{98}+\sqrt{8x^2+8xy+2y^2}=8(2x+y)\sqrt{2}$
	c)	$\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{128}+\sqrt{18}=4\sqrt{2}$
	d)	$3\sqrt{2a^3b^2}-\sqrt{8a^3b^2}+\sqrt{72a^3b^2}=7ab\sqrt{2a}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$\left(a\sqrt{a+b}-b\sqrt{a-b}\right)^2-\left(b\sqrt{a+b}-a\sqrt{a-b}\right)^2=2a^2b-2b^3$
	b)	$\left(3\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}\right)\left(3\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(3\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)^2$ $=36x+18y-6\sqrt{4x^2-y^2}$

E5	Ergebnis
	$\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{a-b}-3\sqrt[3]{a+b}+2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$ $=3\sqrt{a+b}-2\cdot\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}$

E6	Ergebnis
	Beide Behauptungen sind falsch für $a,b\in\mathbb{R}$. z.B. $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\neq 1+2$ $\quad\sqrt{(1-2)^2}=1\neq 1-2$ Für alle $a,b\in\mathbb{R}$ gilt aber $\sqrt{(a+b)^2}=\lvert a+b\rvert$

E7	Ergebnis						
	$a\sqrt{a}$	$a^2\sqrt{a}$	$\frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$	$\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2$	$\frac{\sqrt{a}}{a^2}$	$\sqrt{\frac{1}{a^2}}$
	$a^{1,5}$	$a^{2,5}$	$a^{0,5}$	$a^{-0,5}$	a	$a^{-1,5}$	a^{-1}

E8	Ergebnis
	$e^{-0,5} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{1}{e}}$ $\Rightarrow \quad 5k\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-0,5} = 5k\sqrt{\frac{1}{2k}} \cdot \sqrt{\frac{1}{e}} = 5k\sqrt{\frac{1}{2ke}} = 5\sqrt{\frac{k^2}{2ke}} = 5\sqrt{\frac{k}{2e}}$

E9	Ergebnis
	200 und dreimal die Wurzeltaste ergibt 1,939227447

E10	Ergebnis
	Kantenlänge: $a = \sqrt[3]{15\ dm^3} \approx 2,466\ dm = 24,66\ cm$ Oberfläche: $O = 6 \cdot a^2 \approx 3649,32\ cm^2$

E11	Ergebnis
	$K_5 = 1,3K_0 = K_0(1+i)^5 \Rightarrow 1+i = \sqrt[5]{1,3} \Rightarrow i \approx 0,05387$ Der Zinssatz beträgt $\approx 5,4\%$

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	**Aufgabe**					
	Fassen Sie zusammen					
	a)	$\sqrt{4}-\sqrt{8}+3\sqrt{18}$	b)	$2\sqrt{3}-\sqrt{27}+4\sqrt{9}$	c)	$4\left(\sqrt{2}\right)^3-5\sqrt{2}+\sqrt{18}$

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	$\sqrt{4}-\sqrt{8}+3\cdot\sqrt{18}=2-\sqrt{4\cdot 2}+3\cdot\sqrt{9\cdot 2}=2-2\cdot\sqrt{2}+9\cdot\sqrt{2}=\underline{\underline{2+7\sqrt{2}}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	$2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{27}+4\cdot\sqrt{9}=2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{9\cdot 3}+4\cdot 3=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+12=\underline{\underline{12-\sqrt{3}}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$4\left(\sqrt{2}\right)^3-5\cdot\sqrt{2}+\sqrt{18}=4\cdot 2\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}=8\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}=\underline{\underline{6\sqrt{2}}}$

A2	**Aufgabe**			
	Berechnen, bzw. vereinfachen Sie			
	a)	$\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{(a+b)^3}$	b)	$\sqrt{3(x-y)}\cdot\sqrt{27(x-y)}$
	c)	$\sqrt{\frac{2}{3x+7y}}\cdot\sqrt{\frac{7y+3x}{2}}$	d)	$\sqrt{\frac{1}{14x}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{7}}\cdot\sqrt{\frac{8x^4}{98}}$

A2	Ausführliche Lösungen		
	a)	$\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{(a+b)^3}$ $=\sqrt{(a+b)(a+b)^3}$ $=\sqrt{(a+b)^4}$ $=\underline{\underline{(a+b)^2}}$	b)	$\sqrt{3(x-y)}\cdot\sqrt{27(x-y)}$ $=\sqrt{3\cdot 3\cdot 9(x-y)(x-y)}$ $=\sqrt{9^2(x-y)^2}$ $=\underline{\underline{9(x-y)}}$

A2	Ausführliche Lösungen		
	c)	$\sqrt{\frac{2}{3x+7y}}\cdot\sqrt{\frac{7y+3x}{2}}$ $=\sqrt{\frac{2(7y+3x)}{2(3x+7y)}}$ $=\sqrt{\frac{2\cancel{(3x+7y)}}{2\cancel{(3x+7y)}}}$ $=\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$	d)	$\sqrt{\frac{1}{14x}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{7}}\cdot\sqrt{\frac{8x^4}{98}}$ $=\sqrt{\frac{1\cdot 2x\cdot 8x^4}{14x\cdot 7\cdot 98}}$ $=\sqrt{\frac{4^2x^4}{2^2\cdot 7^4}}$ $=\frac{4x^2}{2\cdot 7^2}=\underline{\underline{\frac{2}{49}x^2}}$

A3	**Aufgabe**		
	Berechnen, bzw. vereinfachen Sie		
a)	$2\sqrt{75}-4\sqrt{12}+\sqrt{3}$	b)	$(2x+y)\sqrt{98}+\sqrt{8x^2+8xy+2y^2}$
c)	$\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{128}+\sqrt{18}$	d)	$3\sqrt{2a^3b^2}-\sqrt{8a^3b^2}+\sqrt{72a^3b^2}$

A3 Ausführliche Lösungen

a)

$$
\begin{aligned}
&2\cdot\sqrt{75}-4\cdot\sqrt{12}+\sqrt{3}\\
&=2\cdot\sqrt{5^2\cdot 3}-4\cdot\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{3}\\
&=2\cdot 5\cdot\sqrt{3}-4\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\\
&=10\cdot\sqrt{3}-8\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\\
&=\underline{\underline{3\cdot\sqrt{3}}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&(2x+y)\sqrt{98}+\sqrt{8x^2+8xy+2y^2}\\
&=8(2x+y)\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

A3 Ausführliche Lösungen

c)

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{128}+\sqrt{18}\\
&=\sqrt{2\cdot 16}+\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 64}+\sqrt{2\cdot 9}\\
&=4\cdot\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{2}-8\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}\\
&=\underline{\underline{4\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&3\cdot\sqrt{2a^3b^2}-\sqrt{8a^3b^2}+\sqrt{72a^3b^2}\\
&=3\cdot\sqrt{2a^3b^2}-\sqrt{2\cdot 4a^3b^2}+\sqrt{2\cdot 36a^3b^2}\\
&=3ab\cdot\sqrt{2a}-2ab\cdot\sqrt{2a}+6ab\cdot\sqrt{2a}\\
&=\underline{\underline{7ab\sqrt{2a}}}
\end{aligned}
$$

A4	**Aufgabe**
	Vereinfachen Sie soweit wie möglich
a)	$\left(a\sqrt{a+b}-b\sqrt{a-b}\right)^2-\left(b\sqrt{a+b}-a\sqrt{a-b}\right)^2$
b)	$\left(3\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}\right)\left(3\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(3\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)^2$

A4 Ausführliche Lösung

a)

$$
\begin{aligned}
&\left(a\sqrt{a+b}-b\sqrt{a-b}\right)^2-\left(b\sqrt{a+b}-a\sqrt{a-b}\right)^2\\
&=a^2(a+b)-2a\sqrt{a+b}\cdot b\sqrt{a-b}+b^2(a-b)-\left[b^2(a+b)-2b\sqrt{a+b}\cdot a\sqrt{a-b}+a^2(a-b)\right]\\
&=a^2(a+b)-2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}+b^2(a-b)-b^2(a+b)+2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}-a^2(a-b)\\
&=a^2(a+b)-\cancel{2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}}+b^2(a-b)-b^2(a+b)+\cancel{2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}}-a^2(a-b)\\
&=a^2(a+b)+b^2(a-b)-b^2(a+b)-a^2(a-b)\\
&=a^2(a+b)-b^2(a+b)-a^2(a-b)+b^2(a-b)\\
&=(a+b)\left(a^2-b^2\right)-(a-b)\left(a^2-b^2\right)\\
&=\left(a^2-b^2\right)\left[(a+b)-(a-b)\right]\\
&=\left(a^2-b^2\right)\left[a+b-a+b\right]\\
&=\underline{\underline{\left(a^2-b^2\right)\cdot 2b=2a^2b-2b^3}}
\end{aligned}
$$

A4 Ausführliche Lösung

b)

$$\left(3\cdot\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}\right)\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)^2$$

$$=\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)\left(3\cdot\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}+3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)$$

$$=\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)\left(3\cdot\sqrt{2x+y}+\cancel{\sqrt{2x-y}}+3\cdot\sqrt{2x+y}-\cancel{\sqrt{2x-y}}\right)$$

$$=\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)\left(6\cdot\sqrt{2x+y}\right)$$

$$=18\cdot\sqrt{2x+y}\cdot\sqrt{2x+y}-6\cdot\sqrt{2x-y}\cdot\sqrt{2x+y}$$

$$=\underline{\underline{18(2x+y)-6\cdot\sqrt{4x^2-y^2}=36x+18y-6\cdot\sqrt{4x^2-y^2}}}$$

A5 **Aufgabe**

Berechnen Sie folgenden Term

$$\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{a-b}-3\sqrt[3]{a+b}+2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$$

A5 Ausführliche Lösung

$$\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{a-b}-3\cdot\sqrt[3]{a+b}+2\cdot\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$$

$$=\sqrt{a+b}+2\cdot\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-3\cdot\sqrt[3]{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{a-b}$$

$$=\sqrt{a+b}+2\cdot\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-3\cdot\sqrt[3]{a+b}-\cancel{\sqrt{a-b}}+\cancel{\sqrt{a-b}}+\sqrt[3]{a-b}$$

$$=\underline{\underline{3\cdot\sqrt{a+b}-2\cdot\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}}$$

A6 **Aufgabe**

$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ $\qquad$ $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$

Gelten diese beiden Behauptungen für $a,b\in\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lässt sich eine Behauptung so verändern, dass sie für alle $a,b\in\mathbb{R}$ gilt?

A6 Ausführliche Lösung

Beide Behauptungen sind falsch für $a,b\in\mathbb{R}$.

Behauptungen: (1) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

(2) $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$

Beide Behauptungen lassen sich durch jeweils ein Beispiel widerlegen.

(1) $a=1;\,b=2\ \Rightarrow\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\neq 1+2=3$

(2) $a=1;\,b=-2\Rightarrow\sqrt{(1-2)^2}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1\neq 1+(-2)=1-2=-1$

Für alle $a,b\in\mathbb{R}$ gilt aber $\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$

A7	**Aufgabe**							
	Ordnen Sie für a > 0 den Wurzeln die zugehörigen Potenzen zu.	$a\sqrt{a}$	$a^2\sqrt{a}$	$\frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$	$\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2$	$\frac{\sqrt{a}}{a^2}$	$\sqrt{\frac{1}{a^2}}$
		$a^{2,5}$	a^{-1}	$a^{1,5}$	$a^{-1,5}$	a	$a^{-0,5}$	$a^{0,5}$

A7 Ausführliche Lösung

$a\sqrt{a}$	$a^2\sqrt{a}$	$\frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$	$\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2$	$\frac{\sqrt{a}}{a^2}$	$\sqrt{\frac{1}{a^2}}$
$a^{1,5}$	$a^{2,5}$	$a^{0,5}$	$a^{-0,5}$	a	$a^{-1,5}$	a^{-1}

$$a\sqrt{a} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{a\sqrt{a} = a^{1,5}}}$$

$$a^2\sqrt{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{a^2\sqrt{a} = a^{2,5}}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^1 \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{a}} = a^{0,5}}}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = \left(a^1 \cdot a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a \Rightarrow \underline{\underline{\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2 = a}}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{a^2} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-2} = a^{-\frac{3}{2}} = a^{-1,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\sqrt{a}}{a^2} = a^{-1,5}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \sqrt{a^{-2}} = \left(a^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{-1} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{a^2}} = a^{-1}}}$$

A8	**Aufgabe**	
	Zeigen Sie die Gleichheit	$5k\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-0,5} = 5\sqrt{\frac{k}{2e}}$ für $k > 0$

A8 Ausführliche Lösung

$$5k \cdot \sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-0,5} = 5 \cdot \sqrt{\frac{k}{2e}} \text{ für } k > 0$$

$$5k \cdot \sqrt{\frac{1}{2k}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 5k \cdot \sqrt{\frac{1}{2k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{k^2}{2k}} \cdot \sqrt{\frac{1}{e}}$$

$$= 5 \cdot \sqrt{\frac{k^2}{2k} \cdot \frac{1}{e}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{k}{2e}}$$

A9	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $\sqrt[8]{200}$ mit Ihrem Taschenrechner.

A9	Ausführliche Lösung
	$\sqrt[8]{200} = 200^{\frac{1}{8}} = 200^{0,125} \approx \underline{\underline{1,939227447}}$

A10	**Aufgabe**
	Wie lang (in cm) ist die Kante eines Würfels mit dem Volumen 15 Liter? Wie groß ist seine Oberfläche?

A10 Ausführliche Lösung

$$\text{Würfelvolumen:}\quad V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$\text{Würfeloberfläche:}\quad O = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$$

$$15\text{ Liter} \mathrel{\hat{=}} 15\text{ dm}^3\ ;\ 1\text{ dm} = 10\text{ cm}$$

$$V = 15\text{ dm}^3 \Leftrightarrow a^3 = 15\text{ dm}^3 \mid \sqrt[3]{\ }$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{15}\text{ dm} = 15^{\frac{1}{3}}\text{ dm}$$

$$\Leftrightarrow a \approx 2,466\text{ dm} = \underline{\underline{24,66\text{ cm}}}$$

$$O = 6a^2 = 6 \cdot \left(15^{\frac{1}{3}}\text{ dm}\right)^2 = 6 \cdot 15^{\frac{2}{3}}\text{ dm}^2 \approx 36,4932\text{ dm}^2$$

$$1\text{ dm}^2 = (10\text{ cm})^2 = 100\text{ cm}^2 \Rightarrow O \approx \underline{\underline{3649,32\text{ cm}^2}}$$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von etwa 24,66 cm.
Seine Oberfläche beträgt etwa 3649,32 cm^2.

A11	**Aufgabe**
	Ein Kapital wächst bei gleich bleibendem Zinssatz in 5 Jahren mit Zinseszins um 30% an. Wie hoch ist der jährliche Zinssatz?

A11 Ausführliche Lösung

Zeit 5 Jahre, Kapital nach 5 Jahren $K_5 = 1,3K_0$.

$$\text{Zinseszinsformel:}\ K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)\ \text{mit p als Zinssatz.}$$

$$1,3K_0 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \mid : K_0$$

$$\Leftrightarrow 1,3 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \mid \sqrt[5]{\ } \Leftrightarrow \sqrt[5]{1,3} = 1 + \frac{p}{100} \mid -1$$

$$\Leftrightarrow 1,3^{\frac{1}{5}} - 1 = \frac{p}{100} \mid \cdot 100 \Leftrightarrow 100 \cdot \left(1,3^{\frac{1}{5}} - 1\right) = p$$

$$\Leftrightarrow p \approx \underline{\underline{5,39}}$$

Der jährliche Zinssatz beträgt etwa 5,39%