Lösungen Polynomgleichungen III

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0 hat genau zwei Lösungen für a = 0 ; a = -1/2 ; a = 2

E2	Ergebnisse	
	a)	Eine Lösung ist jeweils doppelt.
	b)	$x_1 = 2 ; x_{2/3} = -4 \Rightarrow (x-2)(x+4)^2 = x^3 + 6x^2 - 32 = 0$ $x_{1/2} = 2 ; x_3 = -4 \Rightarrow (x-2)^2 (x+4) = x^3 - 12x + 16 = 0$

E3	Ergebnisse	
	a)	$2x^3 - x^2 - x = 0 \Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right\}$
	b)	$x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow L = \left\{-1 ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}\right\}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow L = \{2\}$
	b)	$x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} \Rightarrow L = \{1 ; 1{,}2\}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$ $\Rightarrow L = \left\{-2 ; 1 ; \sqrt{2}\right\}$
	b)	$x^3 - 2{,}63x^2 - 1{,}45x + 3{,}08 = 0$ $\Rightarrow L = \{-1{,}12 ; 1 ; 2{,}75\}$

E6	Ergebnisse	
	a)	$-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow$ $L = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} ; \frac{3}{2} ; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$
	b)	$a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0 \Rightarrow L = \{-1 ; 1 ; 4\}$

E7	Ergebnisse	
	a)	$x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0 \Rightarrow L = \left\{0 ; \sqrt{3} ; 3\right\}$
	b)	$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow L = \left\{\frac{2}{3} ; 2\right\}$

E8	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0 \Rightarrow L = \{-1; 2; 3\}$
	b)	$\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right\}$

E9	Ergebnisse	
	a)	$x^3 - 5x^2 + 6{,}25x = 0 \Rightarrow L = \{0; 2{,}5\}$
	b)	$\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$

E10	Ergebnisse	
	a)	$x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right\}$
	b)	$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow L = \{-2; 2; 3\}$

E11	Ergebnisse	
	a)	$x^3 - 3x^2 = -4 \Rightarrow L = \{-1; 2\}$
	b)	$(3x-5)\frac{(x-2)^2}{5} = 0 \Rightarrow L = \left\{\frac{5}{3}; 2\right\}$

Ausführliche Lösungen

1	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie a so, dass die Gleichung (ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0 genau zwei Lösungen hat.

A1 Ausführliche Lösung

Wie man aus den Linearfaktoren ablesen kann, hat die Polynomgleichung auf jeden Fall zwei Lösungen: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1/2$.
Der Faktor a ist so zu bestimmen, dass keine neue Lösung hinzu kommen kann. Das ist dann der Fall, wenn es entweder bei den zwei Lösungen bleibt oder jeweils eine der vorhandenen Lösungen als Doppellösung dazu kommt.
Falls a = 0 ist, gilt: (- 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0.
In dem Fall bleiben die Lösungen unverändert.

Ansatz für eine dazukommende Doppellösung:

$$ax - 1 = 0 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow ax = 1 \mid : x$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{x}$$

Soll $x = -2$ als Doppellösung dazukommen gilt:

$a = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ falls $x = -2$ dazukommt.

Soll $x = \frac{1}{2}$ als Doppellösung dazukommen gilt:

$a = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ falls $x = \frac{1}{2}$ dazukommt.

$(ax - 1)(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ hat genau zwei Lösungen

$\underline{\underline{\text{für } a = 0 ; a = -\frac{1}{2} ; a = 2}}$

2.	Eine Gleichung 3. Grades hat genau die beiden Lösungen L = { 2 ; -4 }
a)	Machen Sie Aussagen über die Art der Lösungen.
b)	Geben Sie zwei Gleichungen mit diesen Lösungen an.

A2a Ausführliche Lösung

Polynomgleichungen 3. Grades haben mindestens eine reelle Lösung. Die beiden weiteren Lösungen sind beide reell oder beide komplex. Da wir nur die reellen Lösungen betrachten wollen, bedeutet das für vorliegende Aufgabe, die genau zwei Lösungen haben soll, dass eine davon doppelt sein muss.

A2b	**Ausführliche Lösung**
	Sind für eine Polynomgleichung die Lösungen vorgegeben, so lassen sich über die Kombination von Linearfaktoren Gleichungen mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren.
	$x_1 = 2\,;\, x_{2/3} = -4 \Rightarrow (x-2)(x+4)^2 = x^3 + 6x^2 - 32 = 0$
	$x_{1/2} = 2\,;\, x_3 = -4 \Rightarrow (x-2)^2(x+4) = x^3 - 12x + 16 = 0$

3a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $2x^3 - x^2 - x = 0$

A3a	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x ausgeklammert werden. Es entsteht ein Produkt. Da dieses aber Null ist, kann der Satz vom Nullprodukt angewendet werden, der da lautet: "Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist." Die Lösung der Gleichung findet man also dadurch, dass man jeden Faktor für sich gleich Null setzt.
	$2x^3 - x^2 - x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(2x^2 - x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $2x^2 - x - 1 = 0 \mid :2$ $\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ $\Rightarrow p = -\frac{1}{2}\,;\, q = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{8}{16} = \frac{9}{16}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\vert \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{1}{2}\,;\, 0\,;\, 1\right\}}}$

3b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}$

A3b	**Ausführliche Lösung**
	Um eine Lösung durch raten oder probieren zu finden, kann man entweder den Taschenrechner benutzen oder das Horner-Schema verwenden. Hat man eine Lösung für x z. B. mit dem Taschenrechner gefunden, so muss man auf jeden Fall die Polynomdivision durchführen um das Restpolynom zu finden. Hat man hingegen mit dem Horner-Schema einen Lösungswert für x gefunden, so lässt sich aus den Koeffizienten das Restpolynom bilden. Das Horner-Schema liefert also im Schnellverfahren als Abfallprodukt eine Polynomdivision. Durch raten erhält man die Lösung x = -1.

$$x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}=0$$

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\
x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{\frac{1}{6}} & \underline{\frac{1}{6}} \\
 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\
\end{array}$$

$$1x^2 \quad -\frac{1}{6}x \quad -\frac{1}{6} \quad =0$$

$$\text{Restpolynom}: x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0$$

$$\Rightarrow p=-\frac{1}{6};\ q=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{144}+\frac{24}{144}=\frac{25}{144}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\ \begin{array}{l} x_2=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \\ x_3=\frac{1}{12}-\frac{5}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}}}$$

4a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$

A4a	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten erhält man die Lösung x = 2. $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ $\begin{array}{c\|cccc} & -3 & 5 & 0 & 4 \\ x=2 & \downarrow & \underline{-6} & \underline{-2} & \underline{-4} \\ & -3 & -1 & -2 & 0 \end{array}$ $-3x^2 \quad -1x \quad -2 \quad = \ 0$ $\text{Restpolynom}: -3x^2 - x - 2 = 0 \mid \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ $p = \frac{1}{3} \quad ; \quad q = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{36} - \frac{2}{3} < 0$ $\Rightarrow$ keine weitere Lösung $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{\, 2 \,\}}}$ Die erste Zeile im Horner-Schema muss n + 1 Koeffizienten der Polynomgleichung enthalten, wenn der Polynomgrad n ist. Im obigen Beispiel fehlt in der Polynomgleichung der Summand mit dem Exponenten 1 also das x. Im Horner-Schema muss diese Stelle mit 0 aufgefüllt werden. Das Restpolynom hat keine Lösung, da die Diskriminante D < 0 ist.

4b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $x^3-\frac{16}{5}x^2+\frac{17}{5}x-\frac{6}{5}=0$

A4b	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten erhält man die Lösung x = 1.
	$x^3-\frac{16}{5}x^2+\frac{17}{5}x-\frac{6}{5}=0$ $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & -\frac{16}{5} & \frac{17}{5} & -\frac{6}{5} \\ x=1 & \downarrow & 1 & -\frac{11}{5} & \frac{6}{5} \\ & 1 & -\frac{11}{5} & \frac{6}{5} & 0 \end{array}$ $1x^2 -\frac{11}{5}x+\frac{6}{5}=0$ $\text{Restpolynom}: x^2-\frac{11}{5}x+\frac{6}{5}=0$ $\Rightarrow p=-\frac{11}{5};\ q=\frac{6}{5}$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{121}{100}-\frac{120}{100}=\frac{1}{100}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left\| \begin{array}{l} x_2=\frac{11}{10}+\frac{1}{10}=\frac{12}{10}=1{,}2 \\ x_3=\frac{11}{10}-\frac{1}{10}=-\frac{10}{10}=1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{1;1{,}2\}}}$ x = 1 ist doppelte Lösung, in der Lösungsmenge L tritt sie aber nur einmal auf.

5a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

A5a Ausführliche Lösung

Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = 1.

$$x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\right) : (x-1) = x^2 + 2x - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} \\
\underline{-\left(x^3 - x^2\right)} \\
\qquad 2x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x \\
\qquad \underline{-\left(2x^2 \qquad - 2x\right)} \\
\qquad\qquad -\sqrt{2}x^2 \quad -\sqrt{2}x \\
\qquad\qquad \underline{-\left(-\sqrt{2}x^2 \quad +\sqrt{2}x\right)} \\
\qquad\qquad\qquad -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\left(-\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\right)}
\end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 + 2x - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(2 - \sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{2} = 0$$

$$p = 2 - \sqrt{2} \quad ; \quad q = -2\sqrt{2}$$

$$\frac{p}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow -\frac{p}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} \\ x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 - \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-2 ; 1 ; \sqrt{2}\right\}}}$$

Um die quadratische Gleichung lösen zu können muss im Restpolynom durch ausklammern ein gemeinsamer Faktor für x gebildet werden, der das p für die p-q-Formel darstellt. Bei der weiteren Rechnung sollte man sicher in der Anwendung der binomischen Formeln sein.

5b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $x^3-2{,}63x^2-1{,}45x+3{,}08=0$

A5b	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = 1.

$$x^3-2{,}63x^2-1{,}45x+3{,}08=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2{,}63 & -1{,}45 & 3{,}08 \\ x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{-1{,}63} & \underline{-3{,}08} \\ & 1 & -1{,}63 & -3{,}08 & 0 \end{array}$$

$$1x^2 \quad -1{,}63x \quad -3{,}08 \;=\; 0$$

$$\text{Restpolynom}: x^2-1{,}63x-3{,}08=0$$

$$\Rightarrow p=-1{,}63 \Rightarrow -\frac{p}{2}=0{,}815\,;\, q=-3{,}08$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{1{,}63}{2}\right)^2+3{,}08=3{,}744225$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3{,}744225}=1{,}935$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} x_2=0{,}815+1{,}935=2{,}75 \\ x_3=0{,}815-1{,}935=-1{,}12 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1{,}12\,;1;\,2{,}75\}}}$$

Zur Lösung der quadratischen Gleichung leistet der Taschenrechner gute Dienste.

6a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $-u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{5}{2}u-\frac{3}{2}=0$

A6a	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten und probieren erhält man die Lösung u = 3/2.

$$-u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{5}{2}u-\frac{3}{2}=0\,|\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow u^3-\frac{1}{2}u^2-\frac{5}{2}u+\frac{3}{2}=0$$

$$u=\frac{3}{2}\left|\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \downarrow & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

$$1u^2 \quad + \quad 1u \quad -1 \quad = 0$$

$$\text{Restpolynom}: u^2+u-1=0$$

$$\Rightarrow p=1;\, q=-1$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+\frac{4}{4}=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow u_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l} u_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ u_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5};\,\frac{3}{2};\,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}}}$$

Es ist nicht immer einfach die erste Lösung durch raten und probieren zu finden. Teiler vom Absolutglied führen jedoch häufig zum Ziel (hier 3/2).
Die Variable in der Gleichung muss auch nicht immer x sein, sie kann auch wie hier u genannt werden.

6b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

A6b	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten und probieren erhält man die Lösung a = 1.
	$a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$ $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & -4 & -1 & 4 \\ a=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{-3} & \underline{-4} \\ & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$ $\text{Restpolynom}: a^2 - 3a - 4 = 0$ $\Rightarrow p = -3\,;\, q = -4$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{25}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow a_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\| \begin{array}{l} a_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \\ a_3 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-1; 1; 4\}}}$

7a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $x^3-\left(3+\sqrt{3}\right)x^2+3\sqrt{3}x=0$

A7a	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x ausgeklammert werden. Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.
	$x^3-\left(3+\sqrt{3}\right)x^2+3\sqrt{3}x=0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2-\left(3+\sqrt{3}\right)x+3\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ $x^2-\left(3+\sqrt{3}\right)x+3\sqrt{3}=0$ $\Rightarrow p=-3-\sqrt{3}\,;\, q=3\sqrt{3}$ $\frac{p}{2}=-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{3}+3$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{3}+3-\underbrace{\frac{6}{2}\sqrt{3}}_{q}$ $=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+3=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\quad x_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=3$ $\quad x_3=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{0\,;\sqrt{3}\,;3\right\}}}$ Beim quadrieren von p/2 kann das negative Vorzeichen vor der Klammer ignoriert werden, denn das Quadrat einer negativen Zahl ist positiv. Der Ausdruck der Diskriminante lässt sich mit der 2. binomischen Formel in ein Quadrat verwandeln, so dass die Wurzel der Diskriminante im Kopf lösbar ist.

7b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$

A7b	**Ausführliche Lösung**
	Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt.
	$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=0$ $x-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{2}{3}$ $\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0 \mid \cdot 8$ $\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ $\Rightarrow p=-4\,;\,q=4$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-4=0$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}=2$ $\Rightarrow L=\left\{\frac{2}{3};2\right\}$

8a **Aufgabe**

Berechnen Sie $\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}x+1=0$

A8a **Ausführliche Lösung**

Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = -1.

$$\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}x+1=0\,|\cdot 6$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x\;\;+x+6=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{5} & \underline{-6} \\ & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2-5x+6=0$$

$$\Rightarrow p=-5\,;q=6$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}+\frac{24}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} x_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3 \\ x_3=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1;2;3\}}}$$

8b **Aufgabe**

Berechnen Sie $\frac{4}{10}x^3-\frac{6}{10}=0$

A8b **Ausführliche Lösung**

$$\frac{4}{10}x^3-\frac{6}{10}=0\,|\cdot\frac{10}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3-\frac{3}{2}=0\,|+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3=\frac{3}{2}\,|\sqrt[3]{\;}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right\}}}$$

9a **Aufgabe**

Berechnen Sie $x^3 - 5x^2 + 6{,}25x = 0$

A9a **Ausführliche Lösung**

Aus der Polynomgleichung kann x ausgeklammert werden.
Es entsteht ein Produkt. Da dieses aber Null ist, kann der Satz vom Nullprodukt angewendet werden.

$$x^3 - 5x^2 + 6{,}25x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 5x + 6{,}25\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6{,}25 = 0$$

$$\Rightarrow p = -5\,;\, q = 6{,}25$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 6{,}25 - 6{,}25 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\,;\,2{,}5\}}}$$

9b **Aufgabe**

Berechnen Sie $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$

A9b **Ausführliche Lösung**

Aus der Polynomgleichung kann x^2 ausgeklammert werden.
Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt.

$$\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0 \mid +\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x = \frac{1}{2} \mid \cdot\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{0\,;\,\frac{2}{3}\right\}}}$$

10a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

A10a	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x ausgeklammert werden. Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt.
	$x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ $\Rightarrow p = -1;\, q = -\frac{3}{4}$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$ $\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\vert \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ -\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2} \right\}}}$

10b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

A10b	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten erhält man die Lösung x = 2.
	$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & -3 & -4 & 12 \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{-2} & \underline{-12} \\ & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$ $\text{Restpolynom}: x^2 - x - 6 = 0$ $\Rightarrow p = -1; q = -5$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} - \frac{24}{4} = \frac{25}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2 \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2; 2; 3\}}}$

11a **Aufgabe**

Berechnen Sie $x^3 - 3x^2 = -4$

A11a **Ausführliche Lösung**

Durch raten erhält man die Lösung x = -1.

$$x^3 - 3x^2 = -4 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{4} & \underline{-4} \\ & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$
$$\text{Restpolynom}: x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$\Rightarrow p = -4 ; q = 4$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} = 2$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-1; 2\}}}$$

11b **Aufgabe**

Berechnen Sie $(3x-5)\frac{(x-2)^2}{5} = 0$

A11b **Ausführliche Lösung**

Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt.

$$(3x-5)\frac{(x-2)^2}{5} = 0 \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 5(3x-5)(x-2)^2 = 0$$
$$3x - 5 = 0 \mid +5$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x = 5 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{3}$$
$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 2$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{\frac{5}{3}; 2\right\}}}$$