Lösungen Polynomgleichungen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = 5$
	b)	$\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
	c)	$8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

E2	Ergebnisse	
	a)	$27x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
	b)	$\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$
	c)	$-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

E3	Ergebnisse	
	a)	$4k^2x^3 - 2k = 0\,;\, k > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2k}}$
	b)	$\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0\,;\, b > 0 \Leftrightarrow x = b$
	c)	$\left(x + 2a\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - 2a$

E4	Ergebnis
	Für k = 0 gibt es unendlich viele Lösungen. Sonst ist x = 2.

E5	Ergebnis
	$N_4 = N_0 \cdot q^4$ mit $N_4 = 3N_0$ folgt: $3N_0 = N_0 \cdot q^4 \Leftrightarrow q^4 = 3 \Rightarrow q = \sqrt[4]{3} \approx 1{,}32$ $\Rightarrow$ 32% Wachstum pro Stunde.

E6	Ergebnis
	$W_5 = W_0 \cdot q^5$ mit $W_0 = 21500$ und $W_5 = 8500$ folgt: $8500 = 21500 \cdot q^5$ $\Leftrightarrow q^5 = \frac{8500}{21500}$ $\Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{8500}{21500}} \approx 0{,}83$ $\Rightarrow 1 - q \approx 0{,}17\%$ Wertverlust

E7	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0 \Rightarrow L = \{-4\,;0\,;4\}$
	b)	$3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\frac{4}{9}\,;0\right\}$
	c)	$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow L = \{-2\,;0\,;1\}$

E8	Ergebnisse	
	a)	$x^3 - 2x = 0 \Rightarrow L = \{-\sqrt{2}\,;0\,;\sqrt{2}\}$
	b)	$\frac{4}{5}x^3 - 8x^2 + \frac{36}{5}x = 0 \Rightarrow L = \{0\,;1\,;9\}$
	c)	$\frac{1}{6}x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow L = \{-6\,;0\}$

E9	Ergebnisse	
	a)	$4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ $\Rightarrow L = \left\{-1\,;0\,;\frac{3}{2}\right\}$
	b)	$\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow L = \{0\,;4\}$
	c)	$\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0 \Rightarrow L = \{0\,;4\}$

E10	Ergebnis
	Falls a < 0 ist, existiert nur eine Lösung: x = 0. Falls a > 0 ist , existieren 3 Lösungen. Falls a = 0 ist, existiert nur eine Lösung: x = 0.

E11	Ergebnis
	Falls a < -1/4 ist, existiert nur eine Lösung: L = { 0 }. Falls a = -1/4 ist, existieren zwei Lösungen: L = { 0; 0,5 } Falls a = 0 ist, existieren zwei Lösungen L = { 0 ; 0,5 }. Falls a > -1/4 ist, existieren drei Lösungen (siehe ausführliche Lösung).

E12	Ergebnis
	$L = \{0\}\,; D < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4c < 0$ also $b^2 < 4c$

Ausführliche Lösungen

1a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe. $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$

A1a	**Ausführliche Lösung**	
	$\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0 \mid +25$ $\Leftrightarrow \frac{1}{5}x^3 = 25 \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow x^3 = 125 \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5}}$	$\text{Probe: für } x = 5$ $\frac{1}{5} \cdot 5^3 - 25 = 0$ $\Leftrightarrow 25 - 25 = 0$ q.e.d
	Es sei n >1 eine natürliche Zahl. Ist a eine nichtnegative reelle Zahl, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine nichtnegative Lösung. Diese wird als n-te Wurzel aus a bezeichnet. Bei der Probe geht man erst mal davon aus, dass die Gleichung stimmt. Führt die Rechnung auf keinen Widerspruch, so ist der eingesetzte Lösungswert richtig. **q. e. d**. steht für: quod erat demonstrandum, lateinisch für: was zu beweisen war.	

1b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe. $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$

A1b	**Ausführliche Lösung**	
	$\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0 \mid + \frac{4}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{27}{10}x^3 = \frac{4}{5} \mid \cdot \frac{10}{27}$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{4 \cdot 10}{5 \cdot 27}$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{27} \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$	$\text{Probe: für } x = \frac{2}{3}$ $\frac{27}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{4}{5} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{27}{10} \cdot \frac{8}{27} - \frac{4}{5} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$ q.e.d
	Die Multiplikation einer Gleichung mit dem Kehrwert eines Bruches ist äquivalent zur Division durch diesen Bruch. Die Multiplikation mit dem Kehrwert ist oft einfacher durchzuführen.	

1c Aufgabe

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe.

$8x\left(x^2-1\right)=-8x+1$

A1c Ausführliche Lösung

$$
\begin{aligned}
& 8x\left(x^2-1\right)=-8x+1 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3-\cancel{8x}=-\cancel{8x}+1 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3=1 \mid :8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3=\frac{1}{8} \mid \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Probe: für $x=\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
& 8\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right]=-8\cdot\frac{1}{2}+1 \\
\Leftrightarrow\ & 4\left[\frac{1}{4}-1\right]=-4+1 \\
\Leftrightarrow\ & 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-3 \\
\Leftrightarrow\ & -3=-3
\end{aligned}
$$

q.e.d

Wenn auf beiden Seiten einer Gleichung, die nur aus Summanden besteht, gleiche Summanden auftreten, kann man diese einfach streichen.

2a Aufgabe

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe.

$27x^3-8=0$

A2a Ausführliche Lösung

$$
\begin{aligned}
& 27x^3-8=0 \mid +8 \\
\Leftrightarrow\ & 27x^3=8 \mid :27 \\
\Leftrightarrow\ & x^3=\frac{8}{27} \mid \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x=\sqrt[3]{\frac{8}{27}} \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\underline{x=\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

Probe: für $x=\frac{2}{3}$

$$
\begin{aligned}
& 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3-8=0 \\
\Leftrightarrow\ & 27\cdot\frac{8}{27}-8=0 \\
\Leftrightarrow\ & 8-8=0
\end{aligned}
$$

q.e.d

2b Aufgabe

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe.

$\frac{1}{16}x^3-4=0$

A2b	Ausführliche Lösung	
	$\frac{1}{16}x^3-4=0 \mid +4$ $\Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3=4 \mid \cdot 16$ $\Leftrightarrow x^3=64 \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{64}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=4}}$	Probe: für $x=4$ $\frac{1}{16}4^3-4=0$ $\Leftrightarrow \frac{4^3}{4^2}-4=0$ $\Leftrightarrow 4-4=0$ q.e.d

2c	Aufgabe
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe. $-2+\frac{7}{8}x^3=-\frac{5}{2}x^3-1$

A2c	Ausführliche Lösung	
	$-2+\frac{7}{8}x^3=-\frac{5}{2}x^3-1 \mid +\frac{5}{2}x^3$ $\Leftrightarrow -2+\frac{7}{8}x^3+\frac{5}{2}x^3=-1 \mid +2$ $\Leftrightarrow \frac{7}{8}x^3+\frac{20}{8}x^3=1$ $\Leftrightarrow \frac{27}{8}x^3=1 \mid :\frac{8}{27}$ $\Leftrightarrow x^3=\frac{8}{27} \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{2}{3}}}$	Probe: für $x=\frac{2}{3}$ $-2+\frac{7}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3-1$ $\Leftrightarrow -2+\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{27}=-\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{27}-1$ $\Leftrightarrow -2+\frac{7}{27}=-\frac{20}{27}-1$ $\Leftrightarrow -\frac{54}{27}+\frac{7}{27}=-\frac{20}{27}-\frac{27}{27}$ $\Leftrightarrow -\frac{47}{27}=-\frac{47}{27}$ q.e.d

3a	Aufgabe
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe. $4k^2x^3-2k=0\,;k>0$

A3a	**Ausführliche Lösung**	
	$4k^2x^3 - 2k = 0\,;k > 0$ $\Leftrightarrow 4k^2x^3 - 2k = 0 \mid +2k$ $\Leftrightarrow 4k^2x^3 = 2k \mid : 4k^2$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{2k}{4k^2}$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2k} \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \sqrt[3]{\frac{1}{2k}}}}$	Probe: für $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2k}}$ $4k^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2k}}\right)^3 - 2k = 0$ $\Leftrightarrow 4k^2 \cdot \frac{1}{2k} - 2k = 0$ $\Leftrightarrow \frac{4k^2}{2k} - 2k = 0$ $\Leftrightarrow 2k - 2k = 0$ q.e.d
	Die Vorgabe von k > 0 verhindert, das der Nenner des Bruches unter der Wurzel 0 wird. Eine Division durch 0 ist nicht erlaubt.	

3b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe. $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0\,;b > 0$

A3b	**Ausführliche Lösung**	
	$\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0\,;b > 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0 \mid \cdot 4b$ $\Leftrightarrow x^3 - b^3 = 0 \mid +b^3$ $\Leftrightarrow x^3 = b^3 \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{b^3}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = b}}$	Probe: für $x = b$ $\frac{1}{4b}\left(b^3 - b^3\right) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4b}(0) = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0$ q.e.d

3c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und machen Sie die Probe. $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

A3c	**Ausführliche Lösung**	
	$(x+2a)^3=\frac{1}{8}\mid\sqrt[3]{}$ $\Leftrightarrow x+2a=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ $\Leftrightarrow x+2a=\frac{1}{2}\mid -2a$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{2}-2a}}$	$\text{Probe: für } x=\frac{1}{2}-2a$ $\left[\frac{1}{2}-2a+2a\right]^3=\frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}\right]^3=\frac{1}{8}$ q.e.d

4	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $\frac{k\cdot x^3}{4}-2k=0$ Gibt es für jede Wahl von k eine Lösung? Begründen Sie Ihre Aussage.

A4	**Ausführliche Lösung**	
	$\frac{k\cdot x^3}{4}-2k=0\mid +2k$ $\Leftrightarrow\frac{k\cdot x^3}{4}=2k\mid\cdot 4$ $\Leftrightarrow k\cdot x^3=8k\mid : k \text{ falls } k\neq 0$ $\Leftrightarrow x^3=8\mid\sqrt[3]{}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}} \text{ falls } k\neq 0$	Falls $k=0$ $\frac{0\cdot x^3}{4}-2\cdot 0=0\mid\cdot 4$ $\Leftrightarrow 0\cdot x^3-0=0$ $\Leftrightarrow 0=0$
	Die Lösung x = 2 gilt nur für den Fall, dass k ungleich Null ist. Denn durch Null darf man nicht teilen. Setzt man hingegen für k den Wert 0 in die Ausgangsgleichung ein, dann ist die Lösung für alle x-Werte Null. Man sagt auch, die Gleichung hat für k = 0 unendlich viele Lösungen.	

5	**Aufgabe**
	Bestimmte Bakterien verdreifachen ihre Zahl innerhalb von 4 Stunden. Wie groß ist die prozentuale Vermehrung in einer Stunde?

A5	**Ausführliche Lösung**
	Vorbemerkung: Die Wachstumsfunktion für exponentielles Wachstum lautet: $N_t = N_0 \cdot q^t$ Dabei ist: N_0 der Anfangswert t die Zeit (Sekunden, Minuten, Stunden ...) q die Änderungsrate Eine Wachstumsfunktion beschreibt, wie sich der Bestand einer Menge (z.B. Bakterien, Zinsen, Bevölkerung) im Laufe der Zeit verändert. Exponentiell bedeutet, dass die Veränderung pro Zeiteinheit nicht konstant ist. sondern prozentual zum vorherigen Wert des Bestandes. Die Änderungsrate q enthält also die prozentuale Vermehrung. Ist q > 1, so spricht man von einem Wachstum. Ist q < 1, so spricht man von einer Abnahme. Für die gestellte Aufgabe bedeutet das:
	$N_4 = N_0 \cdot q^4$ bzw. $N_4 = 3 \cdot N_0$ $\Rightarrow q^4 = 3 \Rightarrow q = \sqrt[4]{3} \approx 1{,}32$ Die Änderungsrate beträgt etwa q = 1,32. Das bedeutet, dass die prozentuale Vermehrung der Bakterien pro Stunde etwa 32% beträgt.

6	**Aufgabe**
	Zu Beginn eines Jahres wird der Zeitwert eines Autos neu festgelegt. Für einen 5 Jahre alten Gebrauchtwagen bietet ein Händler 8500€. Wie hoch war der jährliche Wertverlust (in Prozent vom Zeitwert), wenn man davon ausgeht, dass dieser in den ersten 5 Jahren gleich hoch ist?

A6	**Ausführliche Lösung**
	Vorbemerkung: Es handelt sich bei dem jährlichen Wertverlust um eine Abnahme. Für die Aufgabe bedeutet das: $W_5 = W_0q^5$ wobei q die jährliche Änderungsrate ist. Wenn diese z.B. q = 0,8 betragen würde, dann wäre das Auto nach einem Jahr nur noch 80% vom Neupreis wert. Der Wertverlust wäre dann 100% - 80% = 20%.
	$W_5 = 8500\,;\ W_0 = 21500$ $W_5 = W_0 \cdot q^5 \ \vert : W_0$ $\Leftrightarrow q^5 = \frac{W_5}{W_0} \ \vert \sqrt[5]{\ }$ $\Leftrightarrow q = \sqrt[5]{\frac{W_5}{W_0}} = \sqrt[5]{\frac{8500}{21500}} \approx 0{,}83$ $1 - q \approx 1 - 0{,}83 = \underline{\underline{0{,}17}}$ Der Wertverlust pro Jahr beträgt etwa 17%.

7a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$

7a	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4}x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \mid +4$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = 4 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow x^2 = 16 \mid \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_{2/3} = \pm 4}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-4; 0; 4\}}}$
	Aus der Linken Seite der Gleichung kann x ausgeklammert werden. Es entsteht ein Produkt. Da dieses aber Null ist, kann der Satz vom Nullprodukt angewendet werden, der da lautet: "Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist." Die Lösung der Gleichung findet man also dadurch, dass man jeden Faktor für sich gleich Null setzt.

7b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$

7b	**Ausführliche Lösung**
	$3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2\left(3x + \frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_{1/2} = 0}}$ $\Rightarrow 3x + \frac{4}{3} = 0 \mid -\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow 3x = -\frac{4}{3} \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = -\frac{4}{9}}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-\frac{4}{9}; 0\}}}$
	Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt.

7c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichungen nach x auf. $x^3+x^2-2x=0$

7c	**Ausführliche Lösung**
	$x^3+x^2-2x=0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ $\Rightarrow x^2+x-2=0$ $\Rightarrow p=1;q=-2$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left\vert\ \begin{array}{l} x_2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1 \\ x_3=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2;0;1\}}}$
	Der zweite Faktor vom Nullprodukt ist eine quadratische Gleichung. Diese lässt sich z.B. mit der p-q-Formel lösen.

8a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung. $x^3-2x=0$

8a	**Ausführliche Lösung**
	$x^3-2x=0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2-2\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ $\Rightarrow x^2-2=0 \mid +2$ $\Leftrightarrow x^2=2 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}}}$
	Lösung nach dem Satz vom Nullprodukt.

8b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung. $\frac{4}{5}x^3-8x^2+\frac{36}{5}x=0$

8b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{4}{5}x^3 - 8x^2 + \frac{36}{5}x = 0 \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow 4x^3 - 40x^2 + 36x = 0 \mid : 4$ $\Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + 9x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2 - 10x + 9\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$ $\Rightarrow p = -10 ; q = 9$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 25 - 9 = 16$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$ $\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{vmatrix} x_2 = 5 + 4 = 9 \\ x_3 = 5 - 4 = 1 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0 ; 1 ; 9\}}}$

8c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung. $\frac{1}{6}x^3 + x^2 = 0$

8c	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{6}x^3 + x^2 = 0 \mid \cdot 6$ $\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2\left(x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_{1/2} = 0}}$ $\Rightarrow x + 6 = 0 \mid -6$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = -6}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-6 ; 0\}}}$

9a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung. $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$

9a	**Ausführliche Lösung**
	$4x\left(x^2-x\right)=7x^3-7x^2-6x$ $\Leftrightarrow 4x^3-4x^2=7x^3-7x^2-6x \mid -7x^3$ $\Leftrightarrow -3x^3-4x^2=-7x^2-6x \mid +7x^2$ $\Leftrightarrow -3x^3+3x^2=-6x \mid +6x$ $\Leftrightarrow -3x^3+3x^2+6x=0 \mid :(-3)$ $\Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2-x-2\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ $\Rightarrow x^2-x-2=0$ $\Rightarrow p=-1;\, q=-2$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left\vert \begin{array}{l} x_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2 \\ x_3=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{2}=-1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1;0;2\}}}$

9b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung. $\frac{3}{4}x^3-3x^2=0$

9b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{3}{4}x^3-3x^2=0 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow 3x^3-12x^2=0$ $\Leftrightarrow x^2\left(3x-12\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_{1/2}=0}}$ $\Rightarrow 3x-12=0 \mid +12$ $\Leftrightarrow 3x=12 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3=4}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{0;4\}}}$

9c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung. $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

9c	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0 \mid \cdot 8$
	$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 16x = 0$
	$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 8x + 16\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$
	$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$
	$\Rightarrow p = -8\,;\, q = 16$
	$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - 16 = 0$
	$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$
	$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} = 4$
	$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{\,0\,;\,4\,\}}}$

10	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von a $ax^3 - 2x = 0$

10	**Ausführliche Lösung**
	$ax^3 - 2x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(ax^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\Rightarrow ax^2 - 2 = 0 \mid +2$ $\Leftrightarrow ax^2 = 2 \mid : a \text{ falls } a > 0$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{a} \mid \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{\frac{2}{a}} \Rightarrow \underline{\underline{x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ -\sqrt{\frac{2}{a}}\,; 0\,; \sqrt{\frac{2}{a}} \right\}}} \text{ falls } a > 0$ Falls $a < 0$ ist $\sqrt{\frac{2}{a}}$ nicht lösbar Falls $a = 0$ ist gilt: $0 \cdot x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 0 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$
	Falls a > 0 ist, gibt es 3 Lösungen: $L = \left\{ -\sqrt{\frac{2}{a}}\,; 0\,; \sqrt{\frac{2}{a}} \right\} \text{ falls } a > 0$ Falls a = 0 ist, gibt es nur eine Lösung: L = { 0 }. Falls a < 0 ist, gibt es nur eine Lösung: L = { 0 }, da die Wurzel nicht lösbar ist.

11	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von c $x^3 - x^2 - cx = 0$

11	**Ausführliche Lösung**
	$x^3 - x^2 - cx = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2 - x - c\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\Rightarrow x^2 - x - c = 0$ $\Rightarrow p = -1; q = -c$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + c$ Falls $D = 0 \Rightarrow x^2 - x - c = 0$ hat eine Lösung $\Rightarrow \frac{1}{4} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$ Falls $D > 0 \Rightarrow x^2 - x - c = 0$ hat zwei Lösungen $\Rightarrow \frac{1}{4} + c > 0 \Rightarrow c > -\frac{1}{4}$ Falls $D < 0 \Rightarrow x^2 - x - c = 0$ hat keine Lösung $\Rightarrow \frac{1}{4} + c > 0 \Rightarrow c > -\frac{1}{4}$
	Die Lösung $x_1 = 0$ existiert für jeden Wert von c. Falls c = -1/4 existieren zwei Lösungen. Falls c > -1/4 existieren drei Lösungen. Falls c < -1/4 existiert nur die Lösung $x_1 = 0$.

12 **Aufgabe**

Welcher Zusammenhang besteht zwischen b und c,
wenn folgende Gleichung genau zwei Lösungen hat?

$x^3 + bx^2 + cx = 0$

12 **Ausführliche Lösung**

$$x^3 + bx^2 + cx = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 + bx + c\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$$

Genau zwei Lösungen bedeutet, dass die quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ nur eine Lösung haben darf. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die Diskriminante D = 0 ist.

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow p = b\,;\, q = c$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{b^2}{4} - c$$

$$\Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} - c = 0 \,|+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4} = c \,|\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{b^2 = 4c}}$$

b^2 =4c ist der Zusammenhang zwischen b und c falls die Gleichung genau zwei Lösungen hat.