Lösungen Exponentialgleichungen IV

Ergebnisse

E1	Ergebnisse:	
	a)	$\frac{e^{-x}}{2}-3=0 \Leftrightarrow x=-\ln\left(6\right)\approx -1{,}792$
	b)	$3e^{x-1}=4 \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{4}{3}\right)+1\approx 1{,}228$
	c)	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\ln\left(4+2e\right)\approx 0{,}561$
	d)	$6-1{,}5e^{2-2x}=0 \Leftrightarrow x=1-\ln\left(2\right)\approx 0{,}307$
	e)	$2{,}5e^{kx}=12\,;k\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{k}\ln\left(4{,}8\right)$
	f)	$1-ke^{k-x}=0\,;k>0 \Leftrightarrow x=k-\ln\left(\frac{1}{k}\right)$
	g)	$250e^{\ln 2x}=1200 \Leftrightarrow x=2{,}4$
	h)	$2{,}078e^{-\frac{1}{8}x}=4{,}156 \Leftrightarrow x=-8\cdot\ln\left(2\right)\approx -5{,}545$
	i)	$12e^{\frac{5}{2}x}=1{,}2\cdot 10^{9} \Leftrightarrow x=3{,}2\cdot\ln\left(10\right)\approx 7{,}368$

E2	Ergebnisse:	
	a)	$2e^{3x}-6e^{x}=0 \Leftrightarrow 2e^{x}\left(e^{2x}-3\right)=0$ für $x=\frac{1}{2}\ln\left(3\right)$
	b)	$\frac{e^{x}}{2}-e^{x+1}=0 \Leftrightarrow e^{x}\left(1-2e\right)=0 \Rightarrow L=\varnothing$
	c)	$\left(x-2\right)e^{2x}-e^{2x}=0 \Leftrightarrow \left(x-3\right)e^{2x}=0$ für $x=3$
	d)	$-2x^{2}e^{-x+2}=0 \Leftrightarrow -2x^{2}e^{-x+2}=0 \Rightarrow x=0$
	e)	$xe^{x}-3x=0 \Leftrightarrow x\left(e^{x}-3\right)=0 \Rightarrow L=\left\{\,0\,;\ln\left(3\right)\,\right\}$
	f)	$\left(3+2x\right)e^{x-1}=0 \Leftrightarrow \left(3+2x\right)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-1{,}5$

E3	Ergebnisse:	
	a)	$e^{2x}-\frac{17}{2}e^{x}+4=0$ Substitution $u=e^{x}$ ergibt $u_1=8\,;u_2=0{,}5\Rightarrow x_1=\ln(8)$ und $x_2=\ln(0{,}5)$
	b)	$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0$ $e^{2x}+5e^{x}-50=0$; Substitution: $u=e^{x}$ ergibt $u_1=5\,;u_2=-10\Rightarrow x_1=\ln(5)$
	c)	$e^{-2x}-10e^{-x}+9=0$ Substitution: $u=e^{-x}$ ergibt $u_1=1;u_2=9\Rightarrow x_1=-\ln(1)=0;\ x_2=\ln(9)$
	d)	$\left(e^{-x}-2k\right)^2=0\,;k>0$ Nullprodukt $\left(e^{-x}-2k\right)=0$ für $x_{1/2}=-\ln(2k)$
	e)	$0{,}5e^{kx}(kx-2)=0\,;k\neq 0\Rightarrow$ Nullprodukt ; $x=\frac{2}{k}$
	f)	$10e^{-0{,}1x}-20e^{-0{,}1x+1}=0{,}2$ $10e^{-0{,}1x}-20e\cdot e^{-0{,}1x}=(10-20e)\cdot e^{-0{,}1x}=0{,}2$ keine Lösung wegen $10-20e<0$

E4	Ergebnisse:	
	a)	$-e^{4x}+5=0\Leftrightarrow x=\frac{\ln(5)}{4}$
	b)	$2e^{x-1}=8\Leftrightarrow x=\ln(4)+1$
	c)	$\frac{e^{0{,}5x}}{2}-\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow x=2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$
	d)	$3e^{-2x}-3=0\Leftrightarrow x=0$
	e)	$4e^{\frac{4}{10}x+2}=6\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)-5$
	f)	$-\frac{1}{4}e^{1{,}5x+1}+2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}(-1+\ln 8)=\ln(4)-\frac{2}{3}$

E5	Ergebnisse:	
	a)	$5e^{2x}-2e^{x}=0\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{2}{5}\right)$
	b)	$1-e^{2-x}=0\Leftrightarrow x=2$
	c)	$3e^{-x}-2e^{x}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$
	d)	$(1+2x)e^{1-2x}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$
	e)	$\left(1-2e^{x}\right)\left(e^{-x}-4\right)=0\Leftrightarrow x_1=\ln\left(\frac{1}{2}\right);\ x_2=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
	f)	$(3+x)e^{0{,}5x}=e^{0{,}5x}\Leftrightarrow x=-2$

E6	Ergebnisse:	
	a)	$2xe^{-x}-7e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$
	b)	$\frac{e^x}{4}-\frac{3}{e^x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(12)$
	c)	$e-2e^{\frac{x}{2}}=0 \Leftrightarrow x=2-\ln(4)$
	d)	$e^x+1=12e^{-x} \Leftrightarrow x=\ln(3)$
	e)	$e^{0,5x}-2e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\ln(2)$
	f)	$\frac{x}{2}e^{-x}-e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=2$
	g)	$625e^{-0,2x}=125 \Leftrightarrow x=5\ln(5)$
	h)	$2k-ke^{4x}=0\,;k\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\ln(2)$
	i)	$\frac{e}{2}-e^{kx}=0\,;k\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\cdot\ln(2)$

E7	Ergebnisse:	
	a)	$e^{2x}-4e^x+3=0 \Leftrightarrow x_1=\ln(3)\,;x_2=0$
	b)	$e^{0,5x}+e^{0,25x}-12=0 \Leftrightarrow x=4\cdot\ln(3)$
	c)	$9e^{-x}+9e^x-82=0 \Leftrightarrow x_1=2\cdot\ln(3)\,;x_2=-2\cdot\ln(3)$
	d)	$2e^x-3e^{-x}+5=0 \Leftrightarrow x=-\ln(2)$
	e)	$e^{2x}+3e^x-40=0 \Leftrightarrow x=\ln(5)$
	f)	$5e^x+25e^{-x}-126=0 \Leftrightarrow x_1=2\cdot\ln(5)\,;x_2=-\ln(5)$

Wie gehe ich vor?

Wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Exponentialgleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben, dann ist eine Lösung mittels Exponentialvergleich möglich.

In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.

Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Ausführliche Lösungen

A1	**Aufgabe**					
	Lösen Sie die Gleichungen					
	a)	$\frac{e^{-x}}{2}-3=0$	b)	$3e^{x-1}=4$	c)	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$
	d)	$6-1{,}5e^{2-2x}=0$	e)	$2{,}5e^{kx}=12\,;\,k\neq 0$	f)	$1-ke^{k-x}=0\,;\,k>0$
	g)	$250e^{\ln 2x}=1200$	h)	$2{,}078e^{-\frac{1}{8}x}=4{,}156$	i)	$12e^{\frac{5}{2}x}=1{,}2\cdot 10^{9}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\frac{e^{-x}}{2}-3=0\mid +3$ $\Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{2}=3\mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^{-x}=6\mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow -x=\ln(6)\mid :(-1)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\ln(6)\approx -1{,}792}}$ Die Gleichung wird zunächst so umgeformt, dass auf beiden Seiten möglichst einfache Ausdrücke stehen. Dann wird unter Anwendung der bekannten Logarithmengesetze logarithmiert.	b)	$3\cdot e^{x-1}=4\mid :3$ $\Leftrightarrow e^{x-1}=\frac{4}{3}\mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x-1=\ln\left(\frac{4}{3}\right)\mid +1$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{4}{3}\right)+1\approx 1{,}288}}$ Die Gleichung wird zunächst so umgeformt, dass auf beiden Seiten möglichst einfache Ausdrücke stehen. Dann wird unter Anwendung der bekannten Logarithmengesetze logarithmiert.

A1	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\mid +\frac{e}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{e}{2}\mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow e^{4x}=4+2e\mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 4x=\ln(4+2e)\mid :4$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)\approx 0{,}561}}$	d)	$6-1{,}5\cdot e^{2-2x}=0\mid +1{,}5\cdot e^{2-2x}$ $\Leftrightarrow 6=1{,}5\cdot e^{2-2x}\mid :1{,}5$ $\Leftrightarrow 4=e^{2-2x}\mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(4)=2-2x\mid +2x$ $\Leftrightarrow 2x+\ln(4)=2\mid -\ln(4)$ $\Leftrightarrow 2x=2-\ln(4)\mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1-\frac{1}{2}\cdot\ln(4)=1-\ln(2)}}$

A1	Ausführliche Lösungen		
e)	$2{,}5e^{kx} - \frac{e}{2} = 12 \quad k \neq 0$ $2{,}5e^{kx} = 12 \mid :2{,}5$ $\Leftrightarrow e^{kx} = 4{,}8 \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow kx = \ln(4{,}8) \mid :k$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{k}\ln(4{,}8)}}$	f)	$1 - k \cdot e^{k-x} = 0 \quad k > 0$ $1 - k \cdot e^{k-x} = 0 \mid +k \cdot e^{k-x}$ $\Leftrightarrow 1 = k \cdot e^{k-x} \mid :k$ $\Leftrightarrow \frac{1}{k} = e^{k-x} \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{k}\right) = k - x \mid +x$ $\Leftrightarrow x + \ln\left(\frac{1}{k}\right) = k \mid -\ln\left(\frac{1}{k}\right)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = k - \ln\left(\frac{1}{k}\right)}}$

A1	Ausführliche Lösungen		
g)	$250 \cdot e^{\ln(2x)} = 1200 \mid :250$ $\Leftrightarrow e^{\ln(2x)} = 4{,}8$ $\Leftrightarrow 2x = 4{,}8 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2{,}4}}$	h)	$2{,}078 \cdot e^{-\frac{1}{8}x} = 4{,}156 \mid :2{,}078$ $\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8}x} = 2 \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{8}x = \ln(2) \mid \cdot(-8)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -8 \cdot \ln(2) \approx -5{,}545}}$

A1	Ausführliche Lösung
i)	$12 \cdot e^{\frac{5}{2}x} = 1{,}2 \cdot 10^9 \mid :12$ $\Leftrightarrow e^{\frac{5}{2}x} = \frac{12 \cdot 10^8}{12} = 10^8 \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow \frac{5}{2}x = \ln(10^8) = 8 \cdot \ln(10) \mid \cdot \frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow x = \frac{16}{5} \cdot \ln(10) = 3{,}2 \cdot \ln(10) \approx 7{,}368$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3{,}2 \cdot \ln(10)}}$

A2	**Aufgabe**					
	Lösen Sie die Gleichungen					
	a)	$2e^{3x}-6e^{x}=0$	b)	$\frac{e^{x}}{2}-e^{x+1}=0$	c)	$(x-2)e^{2x}-e^{2x}=0$
	d)	$-2x^{2}e^{-x+2}=0$	e)	$xe^{x}-3x=0$	f)	$(3+2x)e^{x-1}=0$

A2	Ausführliche Lösungen			
	a)	$2\cdot e^{3x}-6\cdot e^{x}= \mid +6\cdot e^{x}$ $\Leftrightarrow 2\cdot e^{3x}=6\cdot e^{x} \mid :2$ $\Leftrightarrow e^{3x}=3\cdot e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 3x=\ln(3)+x \mid -x$ $\Leftrightarrow 2x=\ln(3) \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{2}\cdot\ln(3)}}$	b)	$\frac{e^{x}}{2}-e^{x+1}=0 \mid +e^{x+1}$ $\Leftrightarrow \frac{e^{x}}{2}=e^{x+1} \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^{x}=2\cdot e^{x+1} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x=\ln(2)+x+1 \mid -x$ $\Leftrightarrow 0=\ln(2)+1 \Rightarrow$ Widerspruch Tritt bei den Lösungsschritten ein Widerspruch auf, so hat die Gleichung keine Lösung.

A2	Ausführliche Lösungen			
	c)	$(x-2)\cdot e^{2x}-e^{2x}=0$ $\Leftrightarrow \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0}\left[(x-2)-1\right]=0$ $\Leftrightarrow x-2-1=0$ $\Leftrightarrow x-3=0 \mid +3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}}$ Der Satz vom Nullprodukt wurde angewendet.	d)	$-2x^{2}\cdot\underbrace{e^{-x+2}}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$ Nach dem Satz vom Nullprodukt muss x^2 = 0 sein und damit auch x. Denn ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Da die e- Funktion für keinen x- Wert Null werden kann, muss also x^2 Null sein.

A2	Ausführliche Lösungen			
	e)	$x\cdot e^{x}-3x=0$ $\Leftrightarrow x\left(e^{x}-3\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ $e^{x}-3=0 \mid +3$ $\Leftrightarrow e^{x}=3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x=\ln(3) \Rightarrow \underline{\underline{x_2=\ln(3)}}$ Der Satz vom Nullprodukt wurde angewendet.	f)	$(3+2x)\cdot\underbrace{e^{x-1}}_{\neq 0}=0$ $\Leftrightarrow 3+2x=0 \mid -3$ $\Leftrightarrow 2x=-3 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$ Der Satz vom Nullprodukt wurde angewendet.

A3	**Aufgabe**			
	Lösen Sie die Gleichungen			
	a)	$e^{2x}-\frac{17}{2}e^{x}+4=0$	b)	$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0$
	c)	$e^{-2x}-10e^{-x}+9=0$	d)	$\left(e^{-x}-2k\right)^{2}=0\,;k>0$
	e)	$0{,}5e^{kx}\left(kx-2\right)=0\,;k\neq 0$	f)	$10e^{-0{,}1x}-20e^{-0{,}1x+1}=0{,}2$

A3 Ausführliche Lösung

a)

$$e^{2x}-\frac{17}{2}e^{x}+4=0$$

Substitution: $e^{x}=u\Leftrightarrow e^{2x}=u^{2}$

$$\Leftrightarrow u^{2}-\frac{17}{2}u+4=0$$

quadratische Gleichung

$$\Rightarrow p=-\frac{17}{2}\,;q=4$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q=\left(-\frac{17}{2}\right)^{2}-4$$

$$=\frac{289}{16}-\frac{64}{16}=\frac{225}{16}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{16}}=\frac{15}{4}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}u_{1}=\frac{17}{2}+\frac{15}{4}=\frac{32}{4}=8\\ u_{2}=\frac{17}{2}-\frac{15}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$u_{1}=8\Leftrightarrow e^{x}=8\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_{1}=\ln\left(8\right)}}$$

$$u_{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x_{2}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\quad\Leftrightarrow\underline{\underline{x_{2}=-\ln\left(2\right)}}$$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0\,|\cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}e^{2x}-e^{x}+10=0\,|\cdot(-5)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}+5e^{x}-50=0$$

Substitution: $e^{x}=u\Leftrightarrow e^{2x}=u^{2}$

$$\Leftrightarrow u^{2}+5u-50=0$$

quadratische Gleichung

$$\Rightarrow p=5\,;q=-50$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q=\left(\frac{5}{2}\right)^{2}+50$$

$$=\frac{25}{4}+\frac{200}{4}=\frac{225}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}u_{1}=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=\frac{10}{2}=5\\ u_{2}=-\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{20}{2}=-10\end{array}\right.$$

$$u_{1}=5\Leftrightarrow e^{x}=5\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow\underline{\underline{x=\ln\left(5\right)}}$$

$$u_{2}=-10\Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Die Multiplikation der Gleichung mit e^{x} vereinfacht den Term.
Für u_2 gibt es keine Lösung, da u_2 negativ und für negative Zahlen kein Logarithmus definiert ist.

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$e^{-2x}-10e^{-x}+9=0\,|\cdot e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 1-10e^{x}+9e^{2x}=0$$
$$\Leftrightarrow 9e^{2x}-10e^{x}+1=0\,|:9$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}-\frac{10}{9}e^{x}+\frac{1}{9}=0$$

Substitution: $e^{x}=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^2$

$$\Leftrightarrow u^2-\frac{10}{9}u+\frac{1}{9}=0$$

quadratische Gleichung

$$\Rightarrow p=-\frac{10}{9}\,;\,q=\frac{1}{9}$$
$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{5}{9}\right)^2-\frac{1}{9}$$
$$=\frac{25}{81}+\frac{9}{81}=\frac{16}{81}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{4}{9}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}u_1=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=\frac{9}{9}=1\\ u_2=\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9}\end{array}\right.$$

$$u_1=1\Leftrightarrow e^{x}=1\,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow x=\ln(1)\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$$
$$u_2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{9}\,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{9}\right)\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=-\ln(9)}}$$

A3 Ausführliche Lösung

d)

$$\left(e^{-x}-2k\right)^2=0\quad k>0$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{-x}-2k\right)\left(e^{-x}-2k\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}-2k=0\,|+2k$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}=2k\,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow -x=\ln(2k)\,|\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_{1/2}=-\ln(2k)}}$$

Lösungsweg:

Das Quadrat des Klammerausdrucks wird als Produkt dargestellt.
Der Satz vom Nullprodukt wird angewendet.
Da beide Klammern identisch sind, ist das Ergebnis als doppelte Nullstelle zu werten.

A3 Ausführliche Lösung

e)

$$0{,}5\underbrace{e^{kx}}_{\neq 0}(kx-2)=0\quad k\neq 0$$
$$\Leftrightarrow kx-2=0\,|+2$$
$$\Leftrightarrow kx=2\,|:k$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{2}{k}}}$$

Lösungsweg:

Zur Lösung der Aufgabe wird der Satz vom Nullprodukt angewendet.
Nur der Klammerausdruck kann Null werden.

A3	Ausführliche Lösung		
	f)	$10e^{-0,1x}-20e^{-0,1x+1}=\frac{2}{10}$ $\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,1x}}_{>0}\underbrace{(10-20e)}_{\approx -44<0}=\underbrace{\frac{2}{10}}_{>0}$ Keine Lösung	Die Gleichung hat keine Lösung. Der Wert der e- Funktion vor der Klammer ist für alle x größer Null. Der Klammerausdruck ist negativ, so dass auch das Produkt auf der linken Seite negativ ist. Das steht im Widerspruch zu dem Wert der rechten Seite, der positiv ist.

A4	**Aufgaben**					
	Lösen Sie die Gleichungen					
	a)	$-e^{4x}+5=0$	b)	$2e^{x-1}=8$	c)	$\frac{e^{0,5x}}{2}-\frac{3}{4}=0$
	d)	$3e^{-2x}-3=0$	e)	$4e^{\frac{4}{10}x+2}=6$	f)	$-\frac{1}{4}e^{1,5x+1}+2=0$

A4	Ausführliche Lösungen			
	a)	$-e^{4x}+5=0 \mid +e^{4x}$ $\Leftrightarrow 5=e^{4x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(5)=4x \mid :4$ $\Leftrightarrow \frac{\ln(5)}{4}=x \Leftrightarrow x=\frac{\ln(5)}{4}\approx 0,402$	b)	$2\cdot e^{x-1}=8 \mid :2$ $\Leftrightarrow e^{x-1}=4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x-1=\ln(4) \mid +1$ $\Leftrightarrow x=\ln(4)+1$

A4	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{2}-\frac{3}{4}=0 \mid +\frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{2}=\frac{3}{4} \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=\frac{3}{2} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln\left(\frac{3}{2}\right) \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow x=2\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	d)	$3\cdot e^{-2x}-3=0 \mid +3$ $\Leftrightarrow 3\cdot e^{-2x}=3 \mid :3$ $\Leftrightarrow e^{-2x}=1 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow -2x=\ln(1)=0 \mid :(-2)$ $\Leftrightarrow x=\frac{0}{-2}=0$ $\Leftrightarrow x=0$ Der Logarithmus zu einer beliebigen Basis von 1 ist immer Null.

A4 Ausführliche Lösung

e)

$$4\cdot e^{\frac{4}{10}x+2}=6\,|:4 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\frac{4}{10}x+2}=\frac{3}{2}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{4}{10}x+2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)|-2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{10}x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)-2\,|\cdot\frac{10}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{\underline{x=\frac{5}{2}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)-5}}$$

A4 Ausführliche Lösung

f)

$$-\frac{1}{4}e^{1{,}5x+1}+2=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}x+1}+2=0\,|-2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}x+1}=-2\,|\cdot(-4)$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}x+1}=8\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x+1=\ln(8)\,|-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x=\ln(8)-1\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\cdot\ln(8)-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(4)-\frac{2}{3}}}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{2}{3}\cdot\ln(8)=\ln\left(8^{\frac{2}{3}}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{8^2}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{64}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{4^3}\right)=\ln(4)$$

Also:

$$x=\frac{2}{3}\cdot\ln(8)-\frac{2}{3}=\ln(4)-\frac{2}{3}$$

A5 **Aufgabe**

Lösen Sie die Gleichungen

a)	$5e^{2x}-2e^{x}=0$	b)	$1-e^{2-x}=0$	c)	$3e^{-x}-2e^{x}=0$
d)	$(1+2x)e^{1-2x}=0$	e)	$(1-2e^{x})(e^{-x}-4)=0$	f)	$(3+x)e^{0{,}5x}=e^{0{,}5x}$

A5 Ausführliche Lösungen

a)

$$5e^{2x}-2e^{x}=0\,|+2e^{x}$$

$$\Leftrightarrow 5e^{2x}=2e^{x}\,|:5$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{2}{5}e^{x}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow 2x=\ln\left(\frac{2}{5}\right)+x\,|-x$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{2}{5}\right)}}$$

b)

$$1-e^{2-x}=0\,|+e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 1=e^{2-x}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(1)=2-x$$

$$\Leftrightarrow 0=2-x\,|+x$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Der Logarithmus zu einer beliebigen Basis von 1 ist immer Null.

A5	Ausführliche Lösung	
	c)	$3e^{-x}-2e^{x}=0\mid+2e^{x} \quad\Leftrightarrow\quad 3e^{-x}=2e^{x}\mid:3$ $\Leftrightarrow\quad e^{-x}=\frac{2}{3}e^{x}\mid\ln(\;) \quad\Leftrightarrow\quad -x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)+x\mid -x$ $\Leftrightarrow\quad -2x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\mid:(-2) \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ oder : $\underline{\underline{x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$ denn $-1\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

A5	Ausführliche Lösung	
	d)	$(1+2x)\underbrace{e^{1-2x}}_{\neq 0}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+2x=0\mid -1$ $\Leftrightarrow\quad 2x=-1\mid:2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\frac{1}{2}}}$ Der Satz vom Nullprodukt wird angewendet.

A5	Ausführliche Lösung	
	e)	$\left(1-2e^{x}\right)\left(e^{-x}-4\right)=0$ $1-2e^{x}=0\mid+2e^{x}$ $\Leftrightarrow 1=2e^{x}\mid:2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{x}\mid\ln(\;)$ $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)=x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=\ln\left(\frac{1}{2}\right)}}$ $e^{-x}-4=0\mid+4$ $\Leftrightarrow e^{-x}=4\mid\ln(\;)$ $\Leftrightarrow -x=\ln(4)\mid\cdot(-1)$ $\Leftrightarrow x=-\ln(4)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=\ln\left(\frac{1}{4}\right)}}$ Der Satz vom Nullprodukt wird angewendet. Jede der beiden Klammern wird Null gesetzt. Es gibt zwei unterschiedliche Lösungen.

A5	Ausführliche Lösung	
	f)	$(3+x)e^{0,5x}=e^{0,5x}\mid:e^{0,5x} \quad\Leftrightarrow\quad 3+x=1\mid -3$ $\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-2}}$

A6	**Aufgabe**					
	Lösen Sie die Gleichungen					
	a) $2xe^{-x}-7e^{-x}=0$		b) $\frac{e^x}{4}-\frac{3}{e^x}=0$		c) $e-2e^{\frac{x}{2}}=0$	
	d) $e^x+1=12e^{-x}$		e) $e^{0,5x}-2e^{-x}=0$		f) $\frac{x}{2}e^{-x}-e^{-x}=0$	
	g) $625e^{-0,2x}=125$		h) $2k-ke^{4x}=0\,;k\neq 0$		i) $\frac{e}{2}-e^{kx}=0\,;k\neq 0$	

A6 Ausführliche Lösungen

a)

$$2xe^{-x}-7e^{-x}=0$$

e^{-x} ausklammern

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}(2x-7)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-7=0\;|+7$$
$$\Leftrightarrow 2x=7\;|:2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$$

Der Satz vom Nullprodukt wird angewendet. Da die e- Funktion für keinen x- Wert Null werden kann, muss also der Klammerausdruck Null sein.

b)

$$\frac{e^x}{4}-\frac{3}{e^x}=0\;\Big|+\frac{3}{e^x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{4}=\frac{3}{e^x}\;|\cdot 4$$
$$\Leftrightarrow e^x=\frac{12}{e^x}\;|\cdot e^x$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}=12\;|\ln(\;)$$
$$\Leftrightarrow 2x=\ln(12)\;|:2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(12)$$

A6 Ausführliche Lösung

c)

$$e-2e^{\frac{x}{2}}=0\;|+2e^{\frac{x}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad e=2e^{\frac{x}{2}}\;|:2$$
$$\Leftrightarrow \frac{e}{2}=e^{\frac{x}{2}}\;|\ln(\;) \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\ln(e)}_{=1}-\ln(2)=\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=1-\ln(2)\;|\cdot 2 \quad\Leftrightarrow\quad x=2-2\ln(2)$$

oder : $x=2-\ln(4)$

A6 Ausführliche Lösung

d)

$$e^x + 1 = 12e^{-x} \mid \cdot e^x$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} + e^x = 12 \mid -12$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 12 = 0$$
Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2$
$$\Leftrightarrow u^2 + u - 12 = 0$$
quadratische Gleichung
$$\Rightarrow p = 1;\, q = -12$$
$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{48}{4} = \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\; \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ u_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{aligned}\right.$$
$$u_1 = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \mid \ln(\;)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(3)}}$$
$$u_2 = -4 \Leftrightarrow \text{keine Lösung}$$

Für u_2 gibt es keine Lösung, weil für negative Zahlen kein Logarithmus definiert ist.

A6 Ausführliche Lösungen

e)

$$e^{0,5x} - 2e^{-x} = 0 \mid +2e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow e^{0,5x} = 2e^{-x} \mid \ln(\;)$$
$$\Leftrightarrow 0,5x = \ln(2) - x \mid +x$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \ln(2) \mid \cdot\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3}\ln(2)}}$$

f)

$$\frac{x}{2}e^{-x} - e^{-x} = 0 \mid +e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}e^{-x} = e^{-x} \mid : e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

A6 Ausführliche Lösungen

g)

$$625e^{-0,2x} = 125 \mid : 625$$
$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{5}x} = \frac{1}{5} \mid \ln(\;)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \mid \cdot(-5)$$
$$\Leftrightarrow x = -5\ln\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5\ln(5)}}$$

h)

$$2k - ke^{4x} = 0;\, k \neq 0$$
$$\Leftrightarrow k\left(2 - e^{4x}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 - e^{4x} = 0 \mid +e^{4x}$$
$$\Leftrightarrow 2 = e^{4x} \mid \ln(\;)$$
$$\Leftrightarrow \ln(2) = 4x \mid : 4$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{4}\ln(2)}}$$

Der Satz vom Nullprodukt wird angewendet. Da entsprechend der Vorgabe k ungleich Null ist, kann nur der Klammerausdruck Null werden.

A6	Ausführliche Lösung	
	i)	$\frac{e}{2}-e^{kx}=0\,;k\neq 0 \Leftrightarrow \frac{e}{2}-e^{kx}=0\,\vert +e^{kx}$ $\Leftrightarrow \frac{e}{2}=e^{kx}\,\vert \ln(\;) \Leftrightarrow \underbrace{\ln(e)}_{=1}-\ln(2)=kx$ $\Leftrightarrow kx=1-\ln(2)\,\vert :k \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\ln(2)}}$

A7	**Aufgabe**					
	Lösen Sie die Gleichungen					
	a)	$e^{2x}-4e^{x}+3=0$	b)	$e^{0,5x}+e^{0,25x}-12=0$	c)	$9e^{-x}+9e^{x}-82=0$
	d)	$2e^{x}-3e^{-x}+5=0$	e)	$e^{2x}+3e^{x}-40=0$	f)	$5e^{x}+25e^{-x}-126=0$

A7 Ausführliche Lösung

a)

$$e^{2x}-4e^{x}+3=0$$

Substitution: $e^{x}=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^2$

$\Leftrightarrow u^2-4u+3=0$

quadratische Gleichung

$\Rightarrow p=-4\,;q=3$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=(-2)^2-3=4-3=1$$

$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}=1$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad \begin{array}{|l} u_1=2+1=3 \\ u_2=2-1=1 \end{array}$$

$u_1=3 \Leftrightarrow e^{x}=3\,\vert \ln(\;)$

$\Leftrightarrow x=\ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=\ln(3)}}$

$u_2=1 \Leftrightarrow e^{x}=1\,\vert \ln(\;)$

$\Leftrightarrow x=\ln(1) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}$

A7 Ausführliche Lösung

b)

$$e^{0,5x}+e^{0,25x}-12=0$$

Substitution: $e^{0,25x}=u \Leftrightarrow e^{0,5x}=u^2$

$\Leftrightarrow u^2+u-12=0$

quadratische Gleichung

$\Rightarrow p=1\,;q=-12$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{1}{2}\right)^2+12=\frac{1}{4}+\frac{48}{4}=\frac{49}{4}$$

$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad \begin{array}{|l} u_1=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{6}{2}=3 \\ u_2=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{8}{2}=-4 \end{array}$$

$u_1=3 \Leftrightarrow e^{0,25x}=3\,\vert \ln(\;)$

$\Leftrightarrow 0,25x=\ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x=4\ln(3)}}$

$u_2=-4 \Leftrightarrow$ keine Lösung

A7 Ausführliche Lösung

c)

$$9e^{-x}+9e^{x}-82=0\,|\cdot e^{x}$$
$$\Leftrightarrow 9+9e^{2x}-82e^{x}=0$$
$$\Leftrightarrow 9e^{2x}-82e^{x}+9=0$$
Substitution: $e^{x}=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^{2}$
$$\Leftrightarrow 9u^{2}-82u+9=0\,|:9$$
$$\Leftrightarrow u^{2}-\frac{82}{9}u+1=0$$
quadratische Gleichung
$$\Rightarrow p=-\frac{82}{9};\ q=1$$
$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q=\left(-\frac{41}{9}\right)^{2}-1=\frac{1681}{81}-\frac{81}{81}=\frac{1600}{81}$$
$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1600}{81}}=\frac{40}{9}$$
$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \Bigg|\ u_1=\frac{41}{9}+\frac{40}{9}=\frac{81}{9}=9;\quad u_2=\frac{41}{9}-\frac{40}{9}=\frac{1}{9}$$
$$u_1=9\Leftrightarrow e^{x}=9\,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow x=\ln(9)\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2\ln(3)}}$$
$$u_2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{9}\,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{9}\right)\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=-2\ln(3)}}$$

A7 Ausführliche Lösung

d)

$$2e^{x}-3e^{-x}+5=0\,|\cdot e^{x}$$
$$\Leftrightarrow 2e^{2x}-3+5e^{x}=0$$
$$\Leftrightarrow 2e^{2x}+5e^{x}-3=0$$
Substitution: $e^{x}=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^{2}$
$$\Leftrightarrow 2u^{2}+5u-3=0\,|:2$$
$$\Leftrightarrow u^{2}+\frac{5}{2}u-\frac{3}{2}=0$$
quadratische Gleichung
$$\Rightarrow p=\frac{5}{2};\ q=-\frac{3}{2}$$
$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q=\left(\frac{5}{4}\right)^{2}+\frac{3}{2}=\frac{25}{16}+\frac{24}{16}=\frac{49}{16}$$
$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{7}{4}$$
$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \Bigg|\ u_1=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\quad u_2=-\frac{5}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$
$$u_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}\,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x=\underbrace{\ln(1)}_{=0}-\ln(2)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\ln(2)}}$$
$$u_2=-3\Leftrightarrow e^{x}=-3\Rightarrow \text{ keine Lösung}$$

Für u_2 gibt es keine Lösung, weil für negative Zahlen kein Logarithmus definiert ist.

A7 Ausführliche Lösung

e)

$$e^{2x} + 3e^{x} - 40 = 0$$

Substitution: $e^{x} = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^{2}$

$\Leftrightarrow u^{2} + 3u - 40 = 0$

quadratische Gleichung

$\Rightarrow p = 3\,;\, q = -40$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^{2} - q = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} + 40 = \frac{9}{4} + \frac{160}{4} = \frac{169}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = -\frac{3}{2} + \frac{13}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ u_2 = -\frac{3}{2} - \frac{13}{2} = -\frac{16}{2} = -8 \end{array} \right.$$

$u_1 = 5 \Leftrightarrow e^{x} = 5 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow x = \ln(3)$

$u_2 = -8 \Leftrightarrow$ keine Lösung

Für u_2 gibt es keine Lösung, weil für negative Zahlen kein Logarithmus definiert ist.

A7 Ausführliche Lösung

f)

$$5e^{x} + 25e^{-x} - 126 = 0 \mid \cdot e^{x}$$

$\Leftrightarrow 5e^{2x} + 25 - 126e^{x} = 0$

$\Leftrightarrow 5e^{2x} - 126e^{x} + 25 = 0$

Substitution: $e^{x} = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^{2}$

$\Leftrightarrow 5u^{2} - 126u + 25 = 0 \mid :5$

$\Leftrightarrow u^{2} - \frac{126}{5}u + 5 = 0$

quadratische Gleichung

$\Rightarrow p = -\frac{126}{5}\,;\, q = 5$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^{2} - q = \left(-\frac{63}{5}\right)^{2} - 5 = \frac{3969}{25} - \frac{125}{25} = \frac{3844}{25}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{3844}{25}} = \frac{62}{5}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = \frac{63}{5} + \frac{62}{5} = \frac{125}{5} = 25 \\ u_2 = \frac{63}{5} - \frac{62}{5} = \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

$u_1 = 25 \Leftrightarrow e^{x} = 25 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow x = \ln(25) \Leftrightarrow x_1 = 2\ln(5)$

$u_2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow e^{x} = \frac{1}{5} \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x_2 = -\ln(5)$