Lösungen Bruchungleichungen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse:	
	a)	$\frac{3}{x+4}<0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ $\quad L=\{x \mid x<-4\}_D$
	b)	$\frac{1}{2x}>\frac{1}{3x}-2 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$ $\quad L=\left\{x \mid x<-\frac{1}{12} \text{ oder } x>0\right\}_D$
	c)	$\frac{3-x}{x-2}>\frac{x+4}{2(x-2)} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\quad L=\left\{x \mid \frac{2}{3}<x<2\right\}_D$

E2	Ergebnisse:	
	a)	$4-\frac{3+2x}{1-x}\geq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\quad L=\left\{x \mid x\leq\frac{1}{6} \text{ oder } x>1\right\}_D$
	b)	$\frac{x-2}{x-5}\geq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$ $\quad L=\{x \mid x\leq 2 \text{ oder } x>5\}_D$
	c)	$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\leq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ $\quad L=\{x \mid x<-1 \text{ oder } x>0\}_D$

E3	Ergebnisse:	
	a)	$\frac{x}{x-1}<1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\quad L=\{x \mid x<1\}_D$
	b)	$\frac{3-2x}{5x+2}\leq 1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ $\quad L=\left\{x \mid x<-\frac{2}{5} \text{ oder } x\geq\frac{1}{7}\right\}_D$
	c)	$\frac{x-2}{x^2}\geq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; wegen $x^2\geq 0: L=\{x \mid x\geq 2\}_D$

E4	Ergebnis:
	$\frac{2+n}{5-n}>4$ für $n\in\left]3{,}6;5\right[$ also $n=4$

E5	Ergebnis:
	$x_1=0;\ x_2=\frac{4u+1}{u}=4+\frac{1}{u}>4$ für $u>0$

E6	Ergebnis:
	Für $u>0$ gilt: $\frac{-1-8u}{-2u}=4+\frac{1}{2u}>4$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Ausführliche Lösungen:

Ungleichungen werden ähnlich wie Gleichungen durch Äquivalenzumformungen gelöst. Zu beachten dabei ist jedoch, dass bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl, bzw. bei der Division durch eine negative Zahl das Relationszeichen umgekehrt werden muss.
Wird eine Bruchgleichung mit einer Variablen multipliziert, bzw. durch sie dividiert, ist eine Fallunterscheidung zu machen. Fall I, der Wert der Variablen ist positiv, Fall II, der Wert der Variablen ist negativ.

Beispiel :

$$-x+2>1\,|-2 \Leftrightarrow -x>-1\,|\cdot(-1) \Leftrightarrow x<1$$

$$\frac{1}{x}<4 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Fall I: $x>0$

$$\frac{1}{x}<4\,|\cdot x \Leftrightarrow 1<4x\,|:4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}<x \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$$

Aus den Bedingungen

$$x>0 \text{ und } x>\frac{1}{4} \Rightarrow x>\frac{1}{4}$$

Fall II: $x<0$

$$\frac{1}{x}<4\,|\cdot x \Leftrightarrow 1>4x\,|:4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}>x \Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$$

Aus den Bedingungen

$$x<0 \text{ und } x<\frac{1}{4} \Rightarrow x<0$$

$$\Rightarrow L=\left\{x\,|\,x<0 \text{ oder } x>\frac{1}{4}\right\}$$

A1	**Aufgabe**					
	Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Gleichungen.					
	a)	$\frac{3}{x+4}<0$	b)	$\frac{1}{2x}>\frac{1}{3x}-2$	c)	$\frac{3-x}{x-2}>\frac{x+4}{2(x-2)}$

A1 Ausführliche Lösung

a)

$$\frac{3}{x+4}<0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$$

Fall I $x>-4 \Rightarrow$ Nenner positiv

$$\frac{3}{x+4}<0\,|\cdot(x+4)$$

$$\Leftrightarrow 3<0 \text{ Widerspruch!}$$

$$\Rightarrow x>-4 \not\subset L$$

Fall II $x<-4 \Rightarrow$ Nenner negativ

$$\frac{3}{x+4}<0\,|\cdot(x+4)$$

$$\Leftrightarrow 3>0$$

$$\Rightarrow x<-4 \subset L$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{x\,|\,x<-4\}_D}}$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A1 Ausführliche Lösung

b) $\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Fall I $x > 0 \Rightarrow$ Nenner positiv

$\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2$

$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2x} > \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3x} - \frac{2 \cdot 6x}{6x} \mid \cdot 6x$

$\Leftrightarrow 3 > 2 - 12x \mid +12x$

$\Leftrightarrow 12x + 3 > 2 \mid -3$

$\Leftrightarrow 12x > -1 \mid : 12 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{12}$

$x > 0 \wedge x > -\frac{1}{12} \Rightarrow x > 0$

Fall II $x < 0 \Rightarrow$ Nenner negativ

$\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2$

$\frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2x} > \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3x} - \frac{2 \cdot 6x}{6x} \mid \cdot 6x$

$\Leftrightarrow 3 < 2 - 12x \mid +12x$

$\Leftrightarrow 12x + 3 < 2 \mid -3$

$\Leftrightarrow 12x < -1 \mid : 12 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{12}$

$x < 0 \wedge x < -\frac{1}{12} \Rightarrow x < -\frac{1}{12}$

$L = \left\{ x \mid x < -\frac{1}{12} \text{ oder } x > 0 \right\}$

A1 Ausführliche Lösung

c) $\frac{3-x}{x-2} > \frac{x+4}{2(x-2)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Hauptnenner $: 2(x-2) \Rightarrow \frac{2(3-x)}{2(x-2)} > \frac{x+4}{2(x-2)}$

Fall I $x > 2 \Rightarrow$ Nenner ist positiv

$\frac{6-2x}{2(x-2)} > \frac{x+4}{2(x-2)} \mid \cdot 2(x-2)$

$\Leftrightarrow 6 - 2x > x + 4 \mid -x$

$\Leftrightarrow 6 - 3x > 4 \mid -6$

$\Leftrightarrow -3x > -2 \mid : (-3)$

$\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$

$x > 2 \text{ und } x < \frac{2}{3} \Rightarrow x \not\subset L$

Fall II $x < 2 \Rightarrow$ Nenner ist negativ

$\frac{6-2x}{2(x-2)} > \frac{x+4}{2(x-2)} \mid \cdot 2(x-2)$

$\Leftrightarrow 6 - 2x < x + 4 \mid -x$

$\Leftrightarrow 6 - 3x < 4 \mid -6$

$\Leftrightarrow -3x < -2 \mid : (-3)$

$\Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

$x < 2 \text{ und } x > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$

$L = \left\{ x \mid \frac{2}{3} < x < 2 \right\}_D$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A2 Aufgabe

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Gleichungen.

a) $4-\frac{3+2x}{1-x}\geq 0$ b) $\frac{x-2}{x-5}\geq 0$ c) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\leq 0$

A2 Ausführliche Lösung

a) $4-\frac{3+2x}{1-x}\geq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\frac{4(1-x)}{1-x}-\frac{3+2x}{1-x}\geq 0 \mid +\frac{3+2x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{4-4x}{1-x}\geq\frac{3+2x}{1-x}$

Fall I $x>1\Rightarrow$ Nenner ist negativ

$\frac{4-4x}{1-x}\geq\frac{3+2x}{1-x}\mid\cdot(1-x)$

$\Leftrightarrow 4-4x\leq 3+2x \mid -2x$

$\Leftrightarrow 4-6x\leq 3 \mid -4 \Leftrightarrow -6x\leq -1 \mid :(-6)$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{6}$

$x>1$ und $x\geq\frac{1}{6}\Rightarrow x>1$

Fall II $x<1\Rightarrow$ Nenner ist positiv

$\frac{4-4x}{1-x}\geq\frac{3+2x}{1-x}\mid\cdot(1-x)$

$\Leftrightarrow 4-4x\geq 3+2x \mid -2x$

$\Leftrightarrow 4-6x\geq 3 \mid -4 \Leftrightarrow -6x\geq -1 \mid :(-6)$

$\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{6}$

$x<1$ und $x\leq\frac{1}{6}\Rightarrow x\leq\frac{1}{6}$

$$\underline{\underline{L=\left\{x \mid x\leq\frac{1}{6} \text{ oder } x>1\right\}_D}}$$

A2 Ausführliche Lösung

b) $\frac{x-2}{x-5}\geq 0\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

Fall I $x>5\Rightarrow$ Nenner ist positiv

$\frac{x-2}{x-5}\geq 0\mid\cdot(x-5)\Leftrightarrow x-2\geq 0\mid +2$

$\Leftrightarrow x\geq 2$

$x>5$ und $x\geq 2\Rightarrow x>5$

Fall II $x<5\Rightarrow$ Nenner ist negativ

$\frac{x-2}{x-5}\leq 0\mid\cdot(x-5)\Leftrightarrow x-2\leq 0\mid +2$

$\Leftrightarrow x\leq 2$

$x<5$ und $x\leq 2\Rightarrow x\leq 2$

$$\underline{\underline{L=\{x \mid x\leq 2 \text{ oder } x>5\}_D}}$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokument ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A2 Ausführliche Lösung

c)

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\le 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\le 0 \mid +\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x}$$

Fall I $x<-1 \Rightarrow$ beide Nenner sind negativ

$$\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x}\mid\cdot x \Rightarrow \frac{x}{x+1}\ge 1\mid\cdot(x+1) \Leftrightarrow x\le x+1\mid -x \Leftrightarrow 0\le 1 \text{ ist wahr}$$

$\Rightarrow x<-1\subset L$

Fall II $-1<x<0 \Rightarrow x+1>0$ und $x<0$

$$\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x}\mid\cdot x \Rightarrow \frac{x}{x+1}\ge 1\mid\cdot(x+1) \Leftrightarrow x\ge x+1\mid -x \Leftrightarrow 0\ge 1 \text{ ist falsch}$$

$\Rightarrow -1<x<0 \not\subset L$

Fall III $x>0 \Rightarrow x+1>0$ und $x>0$

$$\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x}\mid\cdot x \Rightarrow \frac{x}{x+1}\le 1\mid\cdot(x+1) \Leftrightarrow x\le x+1\mid -x \Leftrightarrow 0\le 1 \text{ ist wahr } \Rightarrow x>0\subset L$$

$$L=\{x \mid x<-1 \text{ oder } x>0\}_D$$

A3 **Aufgabe**

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Gleichungen.

a)	$\frac{x}{x-1}<1$	b)	$\frac{3-2x}{5x+2}\le 1$	c)	$\frac{x-2}{x^2}\ge 0$

A3 Ausführliche Lösung

a)

$$\frac{x}{x-1}<1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Fall I $x>1 \Rightarrow x-1>0$

$$\frac{x}{x-1}<1\mid\cdot(x-1) \Leftrightarrow x<x-1\mid -x$$

$\Leftrightarrow 0<-1$ falsch

Fall II $x<1 \Rightarrow x-1<0$

$$\frac{x}{x-1}<1\mid\cdot(x-1) \Leftrightarrow x>x-1\mid -x$$

$\Leftrightarrow 0>-1$ wahr

$$\Rightarrow L=\{x \mid x<1\}_D$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A3	Ausführliche Lösung	
	b)	$\frac{3-2x}{5x+2} \le 1 \qquad 5x+2=0 \mid -2 \Leftrightarrow 5x=-2 \mid 5 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ Fall I $x>-\frac{2}{5} \Rightarrow 5x+2>0$ $\frac{3-2x}{5x+2} \le 1 \mid \cdot(5x+2)$ $\Leftrightarrow 3-2x \le 5x+2 \mid -5x$ $\Leftrightarrow -7x+3 \le 2 \mid -3$ $\Leftrightarrow -7x \le -1 \mid :(-7) \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{7}$ $x>-\frac{2}{5}$ und $x \ge \frac{1}{7} \Rightarrow x \ge \frac{1}{7}$ Fall II $x<-\frac{2}{5} \Rightarrow 5x+2<0$ $\frac{3-2x}{5x+2} \le 1 \mid \cdot(5x+2)$ $\Leftrightarrow 3-2x \ge 5x+2 \mid -5x$ $\Leftrightarrow -7x+3 \ge 2 \mid -3$ $\Leftrightarrow -7x \ge -1 \mid :(-7) \Leftrightarrow x \le \frac{1}{7}$ $x<-\frac{2}{5}$ und $x \le \frac{1}{7} \Rightarrow x<-\frac{2}{5}$ $\Rightarrow L=\left\{x \mid x<-\frac{2}{5} \text{ oder } x \ge \frac{1}{7}\right\}_D$

A3	Ausführliche Lösung	
	c)	$\frac{x-2}{x^2} \ge 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ Für $x<0$ und für $x>0$ ist $x^2>0$, deshalb ist keine Fallunterscheidung nötig. $\frac{x-2}{x^2} \ge 0 \mid \cdot x^2 \Leftrightarrow x-2 \ge 0 \mid +2 \Leftrightarrow x \ge 2 \Rightarrow L=\{x \mid x \ge 2\}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A4	**Aufgabe**
	Welche natürliche Zahl(en) kann man zum Zähler von 2/5 addieren und gleichzeitig vom Nenner subtrahieren so dass der Wert des Bruches größer als 4 ist?

A4 Ausführliche Lösung

Die natürliche Zahl sei $n \in \mathbb{N}$, der Bruch lautet $\frac{2}{5}$

Die Zahl n wird zum Zähler Addiert und vom Nenner subtrahiert.

$\Rightarrow \frac{2+n}{5-n} \Rightarrow D = \mathbb{N} \setminus \{5\}$ Der Wert des Bruches soll > 4 sein.

Fall I $n > 5 \Rightarrow 5-n < 0$

$\frac{2+n}{5-n} > 4 \,|\cdot(5-n)$

$\Leftrightarrow 2+n < 20-4n \,|\, +4n$

$\Leftrightarrow 5n+2 < 20 \,|\, -2 \Leftrightarrow 5n < 18 \,|:5$

$\Leftrightarrow n < \frac{18}{5} \Leftrightarrow n < 3{,}6$

$n > 5$ und $n < 3{,}6 \Rightarrow$ keine Lösung

Fall II $n < 5 \Rightarrow 5-n > 0$

$\frac{2+n}{5-n} > 4 \,|\cdot(5-n)$

$\Leftrightarrow 2+n > 20-4n \,|\, +4n$

$\Leftrightarrow 5n+2 > 20 \,|\, -2 \Leftrightarrow 5n > 18 \,|:5$

$\Leftrightarrow n > \frac{18}{5} \Leftrightarrow n > 3{,}6$

$n < 5$ und $n > 3{,}6 \Rightarrow \underline{\underline{n = 4}}$

Da die gesuchte Zahl eine natürliche Zahl sein soll und die Lösung zwischen 3,6 und 5 liegt, kommt nur die natürliche Zahl n = 4 als Lösung in Frage.

A5	**Aufgabe**
	Zeigen Sie:
	Die Lösungen von $ux^3 - (4u+1)x^2 = 0$ liegen für $u > 0$ nicht im Intervall $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

A5 Ausführliche Lösung

Zu zeigen ist: $ux^3 - (4u+1)x^2 = 0$ und $u > 0 \Rightarrow L \not\subset \left\{x \,|\, \frac{1}{2} \le x \le 2\right\}$

$ux^3 - (4u+1)x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(ux - 4u - 1) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$ (Nullprodukt)

$ux - 4u - 1 = 0 \,|\, +4u \Leftrightarrow ux - 1 = 4u \,|\, +1 \Leftrightarrow ux = 4u + 1 \,|:u$

$\Leftrightarrow x = \frac{4u+1}{u} \Leftrightarrow x_3 = 4 + \frac{1}{u}$ für $u \ne 0$

Da $u > 0$ sein soll, gilt $x_3 = 4 + \frac{1}{u} > 4$

Damit liegen $x_{1/2} = 0$ und $x_3 > 4$ nicht im Intervall $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A6	**Aufgabe**
	Zeigen Sie:
	Für $u > 0$ gilt: $\frac{-1-8u}{-2u} > 4$

A6	Ausführliche Lösung
	Zu zeigen ist: Für $u > 0$ gilt: $\frac{-1-8u}{-2u} > 4$ $\frac{-1-8u}{-2u} > 4 \Leftrightarrow \frac{(\cancel{-1})\cdot(1+8u)}{(\cancel{-1})\cdot 2u} > 4 \Leftrightarrow \frac{1+8u}{2u} > 4 \mid \cdot 2u$ $\Leftrightarrow 1+8u > 8u \mid -8u \Leftrightarrow 1 > 0$ ist wahr Damit stimmt obige Behauptung, was zu zeigen war. oder: $\frac{-1-8u}{-2u} > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2u} + 4 > 4 \Leftrightarrow 4 + \frac{1}{2u} > 4$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de