Schriftliche Übung Mathematik	**Di 24.01.12**
SG29D **NAME:**	

Anzahl aller Möglichkeiten (AaM) für n Elemente bei k- mal ziehen.	Anordnung von k Elementen	$k!$
	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen	n^k
	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$
	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
	Es gilt: $0! = 1! = 1$ und $\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ aber $\binom{n}{1} = n$	

1.	In einer Packung sind 16 Glühlampen, davon sind drei defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn fünf Glühlampen nacheinander „blind“ herausgegriffen werden?
	A: Alle fünf Glühlampen sind in Ordnung.
	B: Genau zwei Glühlampen sind defekt.

A1	Ausführliche Lösungen
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen. n = 16 Glühlampen, davon sind 3 defekt. 5 Glühlampen werden zufällig entnommen. Die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Packung mit 16 Glühlampen zufällig 5 auszuwählen ist: $\binom{16}{5} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4368$

A1	A:	Alle 5 Glühlampen sind in Ordnung. Die Anzahl der Möglichkeiten aus 13 heilen Glühlampen 5 auszuwählen ist 5 aus 13. Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für A : $\binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1287$ Damit ist $P(A) = \frac{1287}{4368} \approx 0{,}295$ die Wahrscheinlichkeit dafür, drei heile Glühlampen auszuwählen.

A1	B:	Genau zwei Glühlampen sind defekt. Von den 13 heilen Glühlampen werden 3 und von den 3 defekten Glühlampen werden zwei gezogen. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist : $\binom{13}{3}\cdot\binom{3}{2}=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 2}{2}=858$ Damit ist $P(B)=\frac{858}{4368}\approx 0{,}196$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den fünf ausgewählten Glühlampen genau zwei defekt sind.

2.	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für 3 richtige im Lotto bei 6 aus 49

A2	Die Anzahl der Möglichkeiten 3 Zahlen von insgesamt 6 Gewinnzahlen anzukreuzen und 3 Zahl von 43 Nicht- Gewinnzahlen anzukreuzen ist: $\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{43\cdot 42\cdot 41}{3\cdot 2\cdot 1}=246\,820$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für 3 richtige. Damit ist $P(3\text{ richtige})=\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}=\frac{246\,820}{13\,983\,816}\approx 0{,}0177$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (3 richtige).

3.	Eine Münze wird 5 mal geworfen und p sei 0,5.		
	a)	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X: Anzahl der Wappen.	
	b)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man	
		(1)	höchstens 3 mal Wappen.
		(2)	weniger als 3 mal Wappen.
		(3)	mindestens 1 mal Wappen
		(4)	mehr als einmal Wappen?

A3 Das Problem kann als 5– stufiger Bernoulli– Versuch betrachtet werden, mit n = 5 und p = 0,5.

a) Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

k	$P(X=k)$
0	$\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}=1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$
1	$\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
2	$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
3	$\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
4	$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
5	$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot1=1\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

b) Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(1) Höchstens 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\le3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$$

(2) Weniger als 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X<3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}=\frac{16}{32}=\underline{\underline{0{,}5}}$$

(3) Mindestens 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\ge1)=\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=\underline{\underline{0{,}96875}}$$

(4) Mehr als 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X>1)=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$$

4. Für ein Bernoulli- Versuch gilt:
$n=1000$ und $p=0{,}28$ bestimmen Sie $P(270\le X\le290)$

A4	Ausführliche Lösung
	$n = 1000 \quad p = 0,28 \quad P(270 \le X \le 290)$ $\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0,28 = 280$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{280 \cdot 0,72} = \sqrt{201,6} \approx 14,199 > 3$ $[...\{270...280...290\}...]$ $P(270 \le X \le 290) = P(269,5 \le X \le 290,5)$ $r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{14,199} \Rightarrow r \approx 0,74 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,74$ $P(270 \le X \le 290) \approx \underline{\underline{0,541}}$

5.	Ein Würfel wird 600 mal geworfen. (Ereignis: Zahl 6 zählt als Erfolg, p = 1/6). Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall { 90 .... 110 }?

A5	Ausführliche Lösung
	$n = 600 \quad p = 1/6 \quad P(90 \le X \le 110)$ $\mu = n \cdot p = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{83,\overline{3}} \approx 9,129 > 3$ $[...\{90...100...110\}...]$ $P(90 \le X \le 110) = P(89,5 \le X \le 110,5)$ $r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{9,129} \Rightarrow r \approx 1,15 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,15$ $P(90 \le X \le 110) \approx \underline{\underline{0,750}}$ Die Wahrscheinlichkeit bei 600 Würfen mindestens 90- mal und höchstens 110- mal die 6 zu werfen ist 0,750.