Schriftliche Übung Mathematik	**Mi 26.01.11**
SG28D NAME:	

Anzahl aller Möglichkeiten (AaM) für n Elemente bei k- mal ziehen.	Anordnung von k Elementen	$k!$
	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen	n^k
	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$
	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
	Es gilt: $0! = 1! = 1$ und $\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ aber $\binom{n}{1} = n$	

1.	Berechnen Sie:							
	a)	$7!$	b)	9^6	c)	$\frac{8!}{(8-4)!}$	d)	$\binom{49}{6}$
	e)	Wie viele Möglichkeiten gibt es 6 Schüler auf 6 Stühle zu verteilen?						

A1	Ausführliche Lösungen	
	a)	$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
	b)	$9^6 = 531441$
	c)	$\frac{8!}{(8-4)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$
	d)	$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$
	e)	$AaM = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

2.	In einer Packung sind 16 Glühlampen, davon sind drei defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn fünf Glühlampen nacheinander „blind“ herausgegriffen werden?
	A: Alle fünf Glühlampen sind in Ordnung.
	B: Genau zwei Glühlampen sind defekt.

A2	Ausführliche Lösungen
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen. n = 16 Glühlampen, davon sind 3 defekt. 5 Glühlampen werden zufällig entnommen. Die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Packung mit 16 Glühlampen zufällig 5 auszuwählen ist: $\binom{16}{5} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4368$

A2	A:	Alle 5 Glühlampen sind in Ordnung. Die Anzahl der Möglichkeiten aus 13 heilen Glühlampen 5 auszuwählen ist 5 aus 13. Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für A : $\binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1287$ Damit ist $P(A) = \frac{1287}{4368} \approx 0{,}295$ die Wahrscheinlichkeit dafür, drei heile Glühlampen auszuwählen.

A2	B:	Genau zwei Glühlampen sind defekt. Von den 13 heilen Glühlampen werden 3 und von den 3 defekten Glühlampen werden zwei gezogen. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist : $\binom{13}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 858$ Damit ist $P(B) = \frac{858}{4368} \approx 0{,}196$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den fünf ausgewählten Glühlampen genau zwei defekt sind.

3.	Ein Fahrradschloss (Zahlenschloss) besteht aus vier unabhängig voneinander beweglichen Rädern, die jeweils 8 Ziffern (von 1 bis 8) enthalten. Das Schloss öffnet sich nur bei einer ganz bestimmten Zahlenkombination.	
	a)	Wie viele Stellungen (Zahlenkombinationen) hat das Fahrradschloss?
	b)	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Einstellung das Schloss zu öffnen?

A3	Ausführliche Lösungen
	Modell: Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen. Modellierung mit dem Urnenmodell: Eine Urne enthält **n = 8** Kugeln mit den Nummern 1 bis 8. Es wird **k = 4** mal gezogen **mit** Zurücklegen.

A3	A:	Die Anzahl der Zahlenkonbinationen beträgt: $n^k = 8^4 = \underline{\underline{4096}}$

A3	B:	Die Wahrscheinlichkeit mit einem Versuch die richtige Kombination zu finden ist $\frac{1}{4096} \approx \underline{\underline{0{,}000244}}$

4.	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für 3 richtige im Lotto bei 6 aus 49

A4

Die Anzahl der Möglichkeiten 3 Zahlen von insgesamt 6 Gewinnzahlen anzukreuzen und 3 Zahl von 43 Nicht- Gewinnzahlen anzukreuzen ist:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 246\,820$$

Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für 3 richtige. Damit ist

$$P(3 \text{ richtige}) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246\,820}{13\,983\,816} \approx 0{,}0177$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (3 richtige).

5.	Eine Münze wird 5 mal geworfen und p sei 0,5.		
	a)	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X: Anzahl der Wappen.	
	b)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man	
		(1)	höchstens 3 mal Wappen.
		(2)	weniger als 3 mal Wappen.
		(3)	mindestens 1 mal Wappen
		(4)	mehr als einmal Wappen?

A5 Das Problem kann als 5– stufiger Bernoulli– Versuch betrachtet werden, mit n = 5 und p = 0,5.

a) Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

k	$P(X=k)$
0	$\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}=1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$
1	$\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
2	$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
3	$\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
4	$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
5	$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot1=1\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

b) Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(1) Höchstens 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\le3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0,8125}}$$

(2) Weniger als 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X<3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}=\frac{16}{32}=\underline{\underline{0,5}}$$

(3) Mindestens 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\ge1)=\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=\underline{\underline{0,96875}}$$

(4) Mehr als 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X>1)=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0,8125}}$$