Schriftliche Übung Mathematik	**Do 14.01.10**
SG17D NAME:	

Anzahl aller Möglichkeiten (AaM) für n Elemente bei k- mal ziehen.	Anordnung von k Elementen	$k!$
	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen	n^k
	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$
	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
	Es gilt: $0!=1!=1$ und $\binom{0}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ aber $\binom{n}{1}=n$	

1.	Auf einer Geburtstagsfeier werden unter 8 Mädchen ein 1., ein 2. und ein 3. Preis verlost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse?	
	A:	Anita gewinnt den 1., Irene den 2. und Katja den 3. Preis.
	B:	Anita, Irene und Katja gewinnen je einen Preis.

A1 Ausführliche Lösung

Modell: Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.

Die Anzahl aller Möglichkeiten ist $\frac{8!}{(8-3)!}=8\cdot7\cdot6=336$

A1 A: Anita (1. Preis), Irene (2. Preis), Katja (3. Preis).

Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: 1

Damit ist $P(A)=\frac{1}{336}\approx 0{,}00298$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anita den 1.Preis, Irene den 2. Preis und Katja den 3. Preis bekommt.

A1 B: Anita, Irene und Katja gewinnen je einen Preis.

Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $3!=6$

Damit ist $P(B)=\frac{6}{336}=\frac{1}{56}\approx 0{,}0179$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anita , Irene und Katja je einen Preis gewinnen.

2.	In einer Packung sind 16 Glühlampen, davon sind drei defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn fünf Glühlampen nacheinander „blind“ herausgegriffen werden?
	A: Alle fünf Glühlampen sind in Ordnung.
	B: Genau zwei Glühlampen sind defekt.

A2 Ausführliche Lösungen

Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.

n = 16 Glühlampen, davon sind 3 defekt. 5 Glühlampen werden zufällig entnommen.
Die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Packung mit 16 Glühlampen zufällig 5 auszuwählen ist:

$$\binom{16}{5} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4368$$

A2 A: Alle 5 Glühlampen sind in Ordnung.
Die Anzahl der Möglichkeiten aus 13 heilen Glühlampen 5 auszuwählen ist 5 aus 13.

Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für A : $\binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1287$

Damit ist $P(A) = \frac{1287}{4368} \approx 0{,}295$
die Wahrscheinlichkeit dafür, drei heile Glühlampen auszuwählen.

A2 B: Genau zwei Glühlampen sind defekt.
Von den 13 heilen Glühlampen werden 3 und von den 3 defekten Glühlampen werden zwei gezogen.

Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist : $\binom{13}{3} \cdot \binom{3}{2} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 858$

Damit ist $P(B) = \frac{858}{4368} \approx 0{,}196$
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den fünf ausgewählten Glühlampen genau zwei defekt sind.

3.	Für eine Prüfung werden 8 mögliche Themen vereinbart. Drei davon werden in der Prüfung abgefragt. Ein Prüfling lernt nur 5 der 8 Themen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei der in der Prüfung abgefragten Themen von ihm vorbereitet wurden?

A3	Ausführliche Lösung
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder Ziehen mit einem Griff. 8 mögliche Themen, 3 werden abgefragt, Prüfling lernt für 5. Anzahl der Möglichkeiten aus 8 Themen 3 auszuwählen ist: $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

A3	Ausführliche Lösung
	Der Prüfling hat sich auf zwei der drei ausgewählten Themen vorbereitet. Aus den 3 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, wird 1 Thema ausgewählt, aus den 5 Themen auf die er sich vorbereitet hat werden 2 Themen ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten ist: $\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 30$ Damit ist $P = \frac{30}{56} \approx 0{,}536$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prüfling sich auf zwei Themen vorbereitet hat.

4.	Eine Familie hat 6 Kinder. Die Wahrscheinlichkeit ein Mädchen zu gebären betrage p = 0,5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das unter den 6 Kindern genau die Hälfte der Kinder Mädchen sind.

A4	Das Problem kann als 6– stufiger Bernoulli– Versuch betrachtet werden mit n = 6 und p = 0,5. Gesucht ist P(X = 3). $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $P(X = 3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 20 \cdot \frac{1}{64} = \underline{\underline{0{,}3125}}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern genau drei Mädchen sind.

5. Ein Multiple- Choice- Test besteht aus 50 Aufgaben mit jeweils 5 Antworten, von denen nur jeweils eine richtig ist.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man durch bloßes Raten folgende Anzahl von Aufgaben richtig beantworten?

a) Mehr als 20 Aufgaben.
b) Mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben.
c) Weniger als 10 Aufgaben.
d) Genau 15 Aufgaben.

Die Trefferwahrscheinlichkeit pro Aufgabe ist 1/5 = 0,2.

Da diese Wahrscheinlichkeit bei jeder der 50 Aufgaben besteht, kann der Vorgang als 50 stufiger Bernoulliversuch betrachtet werden.

Der Auszug aus der kumulierten Binomialverteilung mit n = 50 und p = 0,2 soll als Hilfestellung genutzt werden.

k	9	10	11	14	15
$P(X \le k)$	0,444	0,584	0,711	0,939	0,969
k	16	19	20	21	22
$P(X \le k)$	0,986	0,999	1	1	1

A5 Ausführliche Lösungen

a) $P(X \ge 21) = P(X = 50) - P(X \le 20) = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$
Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mehr als 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist kleiner als 0,001 (0,1%).

A5 b) $P(10 \le k \le 20) = P(X \le 20) - P(X \le 9) = 1 - 0,444 = \underline{\underline{0,565}}$
Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,565 (56,5%).

A5 c) $P(X \le 9) = \underline{\underline{0,444}}$ direkt aus der Tabelle ablesbar.
Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten weniger als 10 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,444 (44,4%).

A5 d) $P(X = 15) = P(X \le 15) - P(X \le 14) = 0,969 - 0,939 = \underline{\underline{0,03}}$
Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten genau 15 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,03 (3%).