Schriftliche Übung SG15/25D **Mathematik** **NAME:** **Bearbeitungszeit 40 min.** **Di 19.02.08**

Hilfsmittel: Taschenrechner und Tabelle der „Normalverteilung“.
Formulieren Sie zu jeder Aufgabe einen passenden Antwortsatz!
Verwenden Sie bei der Bearbeitung die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Schreibweisen und Darstellungen.

An einer bestimmten Stelle führt die Polizei regelmäßig Radarkontrollen durch. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass ungefähr 24% aller männlichen und 14% aller weiblichen Fahrer an dieser Stelle zu schnell fahren. Wir nennen diese Personen hier kurz „Raser“. Bei der letzten Kontrolle wurden 100 Fahrzeuge in Hinblick auf ihre Geschwindigkeit überprüft. 40 dieser Fahrzeuge wurden von Frauen gelenkt.

a) Gehen Sie davon aus, dass die Erfahrungswerte der Polizei stimmen. Nebenstehende Vierfeld- Tafel stellt den Sachzusammenhang dar. Berechnen Sie für die zufällige Auswahl eines überprüften Fahrzeugs (die Polizei lässt für den Zeitraum der Überprüfung eine Videokamera mitlaufen) die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

	R	N	
M	0,144	0,456	0,6
W	0,056	0,344	0,4
	0,2	0,8	1

M : Mann W : Frau
R : Raser N : kein Raser

A: Das überprüfte Fahrzeug fuhr zu schnell und wurde von einer Frau gelenkt..
B: Das überprüfte Fahrzeug wurde nicht geblitzt.
C: Falls das ausgewählte Fahrzeug von einem Mann gelenkt wurde, mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um einen Raser?
D: Falls das Fahrzeug geblitzt wurde, mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es von einer Frau gelenkt?

Formulieren Sie zu jedem Ergebnis einen aussagekräftigen Antwortsatz.

Lösung zu a)

$P(A) = P(W \cap R) = 0{,}056$

Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,056 von einem weiblichen Raser gelenkt.

$P(B) = P(N) = 0{,}8$

Eine zufällig ausgewähltes Fahrzeug ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 nicht zu schnell.

$$P(C) = P_M(R) = \frac{P(M \cap R)}{P(M)} = \frac{0{,}144}{0{,}6} = 0{,}24$$

Eine zufällig ausgewähltes Fahrzeug, von dem man weiß, dass es von einem Mann gelenkt wird, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,24 zu schnell.

$$P(D) = P_R(W) = \frac{P(R \cap W)}{P(R)} = \frac{0{,}056}{0{,}2} = 0{,}28$$

Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug, von dem man weiß, dass es zu schnell ist, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,28 von einer Raserin gelenkt.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass 20% aller Verkehrsteilnehmer, die an der entsprechenden Stelle kontrolliert werden Raser sind.
Weiterhin wird angenommen, dass die Anzahl der Raser in den Kontrollen einer Binomialverteilung genügt.

b) Überprüfen Sie, ob die Verteilungsfunktion der Laplace- Bedingung genügt. Welche Bedeutung hat das Ergebnis?

Lösung zu b)

Laplace- Bedingung: $p = 0,2 \qquad n = 100$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = \sqrt{16} = 4$ Laplace- Bedingung: $\sigma > 3$ Die Laplace- Bedingung ist erfüllt.	Das bedeutet, Umgebungswahrscheinlichkeiten können mit den Tabellenwerten der Normalverteilung hinreichend genau berechnet werden.

c) Mit wie vielen Bußgeldbescheiden kann die Polizei bei der Überprüfung von 100 Fahrzeugen rechnen?

Lösung zu c)

Die Polizei kann bei der Überprüfung von n = 100 Fahrzeugen mit etwa 20 Bußgeldbescheiden rechnen. Das entspricht dem Erwartungswert.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert. Runden Sie den Faktor von Sigma (z) auf 2 Stellen hinter dem Komma.

Lösung zu d)

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,2 = 20$; Standardabweichung $\sigma = 4$

$P(X = 20) \Rightarrow$ Radius $r = 0,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{0,5}{4} \Rightarrow r = 0,125 \cdot \sigma \Rightarrow z = 0,125$

gerundet auf $0,13 \Rightarrow$ Tabellenwert: 0,111

gerundet auf $0,12 \Rightarrow$ Tabellenwert: 0,096

Damit liegt $P(X = 20)$ zwischen den Werten von 0,096 und 0,111

Mit dem Taschenrechner: $P(X = 20) = \binom{100}{20} \cdot 0,2^{20} \cdot 0,8^{80} \approx 0,0993$

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Raser zwischen 15 und 25?

Lösung zu e)

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,2 = 20$; Standardabweichung $\sigma = 4$

$P(15 \le X \le 20) \Rightarrow$ Radius $r = 5,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{5,5}{4} \Rightarrow r = 1,375 \cdot \sigma \Rightarrow z = 1,375$

gerundet auf $1,38 \Rightarrow$ Tabellenwert: 0,832

gerundet auf $1,37 \Rightarrow$ Tabellenwert: 0,829

Damit liegt $P(15 \le X \le 20)$ zwischen den Werten von 0,829 und 0,832

f) Wie würden Sie einen Hypothesentest bezogen auf obige Aufgabenstellung durchführen (linksseitig, rechtsseitig oder beidseitig)?
Was bedeuten die Begriffe: Annahmebereich, Ablehnungsbereich, Signifikanzniveau, und Fehler 1. Art?

Lösung zu f)

Wenn die Nullhypothese lautet: „20% aller Verkehrsteilnehmer fahren zu schnell".
Also $H_0 = 0{,}2$, dann ist ein beidseitiger Hypothesentest durchzuführen.
Der Annahmebereich ist ein Bereich der zur Annahme der Hypothese führt, falls das Umfrageergebnis in diesem Bereich liegt.
Der Ablehnungsbereich ist ein Bereich der zur Ablehnung der Hypothese führt, falls das Umfrageergebnis in diesem Bereich liegt.
Wird ein Signifikanzniveau vorgegeben, dann bestimmt dieses die Größe des Annahme- bzw. Ablehnungsbereichs.
Gibt man hingegen einen Ablehnungs- bzw. Annahmebereich vor, so wird durch deren Größe das Signifikanzniveau bestimmt.
Der Fehler 1. Art wird begangen, wenn eine wahre Hypothese daraufhin abgelehnt wird, weil das Umfrageergebnis im Ablehnungsbereich liegt. Die Fehlerwahrscheinlichkeit entspricht dem Signifikanzniveau.

Viel Erfolg!