

Gebrochen rationale Funktionen (mit Parameter)

1. Gegeben sind Funktionen f_k durch $f_k(x) = \frac{2x}{(x^2 + k)}$

a) Untersuche allgemein die Funktionen f_k .

Versuche, Typen des Graphen anzugeben.

b) Welche gemeinsamen Eigenschaften haben alle Funktionen f_k

c) Berechne $\int_0^{\sqrt{k}} f_k(x) dx$ und gib dem Integralwert eine anschauliche Deutung.

Symmetrien:

$$f_k(1) = \frac{2 \cdot 1}{(1^2 + k)} = \frac{2}{1+k}$$

$$f_k(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{((-1)^2 + k)} = \frac{-2}{1+k} = -\frac{2}{1+k} = -f(1) \Rightarrow \text{Punktsymmetrie zum Ursprung.}$$

Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x^2 + k} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x + \frac{k}{x}} \right) = +0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + k} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x + \frac{k}{x}} \right) = -0$$

Koordinatenschnittpunkte:

Da Punktsymmetrie vorliegt, verläuft der Graph durch den Koordinatenursprung.
 $P(0|0)$ für $k \neq 0$. Weitere Nullstellen gibt es nicht.

(Für $k = 0$ geht die Funktion über in $f_0(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ wird später untersucht)

Vorzeichenbereiche:

Der Graph verläuft durch den 1. und 3. Quadranten und ist im 1. Quadranten positiv, im 2. Quadranten negativ.

Ableitungen:

$$f_k(x) = \frac{2x}{(x^2 + k)}$$

$$f'(x) = -2 \frac{(x^2 - k)}{(x^2 + k)^2} \quad (\text{abgeleitet nach der Quotientenregel}) \quad \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f''(x) = 4x \frac{(x^2 - 3k)}{(x^2 + k)^3} \quad (\text{Quotientenregel und Kettenregel für Nenner})$$

$$v = (x^2 + k)^2 \Rightarrow v' = 2(x^2 + k) \cdot 2x = 4x(x^2 + k) \quad (\text{Kettenregel für Nenner})$$

$$f'''(x) = -12 \frac{(x^4 - 6kx^2 + k^2)}{(x^2 + k)^4}$$

Extrema:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Rightarrow$

$$-2 \frac{(x^2 - k)}{(x^2 + k)^2} = 0 \Rightarrow (x^2 - k) = 0 \Rightarrow x^2 = k \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{k}}} \quad \text{und } k > 0$$

auch hinreichend wenn $f''(\pm\sqrt{k}) \neq 0$

$$f''(\sqrt{k}) = 4\sqrt{k} \frac{(k - 3k)}{(k + k)^3} = 4\sqrt{k} \frac{(-2k)}{(2k)^3} = -8\sqrt{k} \frac{k}{8k^3} = \frac{-\sqrt{k}}{k^2} < 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum}$$

Wegen der Punktsymmetrie ist $f''(-\sqrt{k}) > 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum}$

$$\text{Koordinaten der Extrema: } P_{\min} \left(-\sqrt{k} \mid -\frac{\sqrt{k}}{k} \right) \text{ und } P_{\max} \left(\sqrt{k} \mid \frac{\sqrt{k}}{k} \right)$$