Integration der e- Funktion

Einführung:

Rückblickend zusammengefasst sind aus der Integralrechnung folgende Zusammenhänge bekannt:

Wird eine beliebige integrierbare Funktion $f(x)$ integriert, so erhält man eine Stammfunktion: $F(x)=\int f(x)dx$

Die Funktion $f(x)$ wird auch Integrandenfunktion genannt.

Es gilt: $F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

Das bedeutet, leitet man die Stammfunktion ab, so erhält man wieder die Integrandenfunktion. Dieser Zusammenhang ermöglicht es uns durch Ableiten das Ergebnis der Integration zu überprüfen.

Beispiel:

$f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$ abgeleitet: $F'(x)=x^2=f(x)$

Angewendet auf die e- Funktion, von der man weiß, dass diese sich bei der Ableitung selber reproduziert, bedeutet das:

Sei $F(x)=\int f(x)dx=e^x+C$ die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$,

dann ist $F'(x)=f(x)=\left[e^x+C\right]'=e^x$

$$\boxed{(1) \qquad \text{Integration der } e-\text{Funktion}: \quad \int e^x\,dx=e^x+C}$$

Bei der Ableitung der e- Funktion war in den Fällen, in denen der Exponent der e- Funktion nicht nur aus der Variablen x bestand, die Kettenregel zu verwenden. Bei der Integration ist die Integrandenfunktion so zu substituieren, dass mit der Regel (1) integriert werden kann.

Allgemeines Integral mit Substitution

$f(x)=e^{-x} \Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx$

$\text{Substitution}: u(x)=-x \Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=-1 \Rightarrow dx=-du$

$\Rightarrow \int e^{-x}\,dx=-\int e^u\,du=-e^u+C$ Rücksubstitution: $\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx=\underline{\underline{-e^{-x}+C}}$

Probe:

$F(x)=-e^{-x}+C \Rightarrow F'(x)=(-1)\cdot\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}=f(x)$

$$f(x) = e^{2x-1} \Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x) = 2x-1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x-1} + C}}$$

Probe:

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C \Rightarrow F'(x) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x-1} = e^{2x-1} = f(x)$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(1-x)} \Rightarrow F(x) = \int e^{-\frac{1}{2}(1-x)}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x) = -\frac{1}{2}(1-x) \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{-\frac{1}{2}(1-x)}\,dx = 2\cdot\int e^u\,du = 2e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{-\frac{1}{2}(1-x)}\,dx = \underline{\underline{2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)} + C}}$$

Probe:

$$F(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)} = e^{-\frac{1}{2}(1-x)} = f(x)$$

Bestimmtes Integral mit Substitution

Um Flächen zwischen dem Graphen und der x- Achse zu berechnen, ist stets ein bestimmtes Integral zu lösen. Auch hier führt die Methode der Substitution zum Ziel. Für die Lösung des Integrals durch Substitution gibt es zwei verschiedene Varianten.

Variante 1: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$

Substitution: $u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$

Allgemeine Lösung des Integrals:

$$\int e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int e^u\,du = 2\cdot e^u + C \Rightarrow 2\cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + C$$

Als bestimmtes Integral berechnen (ohne die Konstante C):

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\left[e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0,3834 = \underline{\underline{0,7668}}$$

Variante 2: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$

Substitution: $u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2 \cdot du$

Die Grenzen werden ebenfalls substituiert:

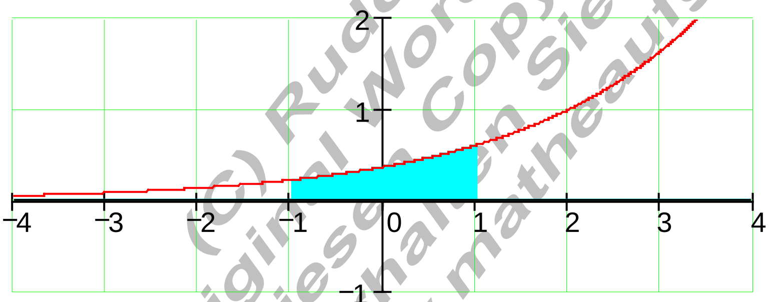
untere Grenze: $ug = u(-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

obere Grenze: $og = u(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$$A = \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2 \cdot \int\limits_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^{u}\,du = 2 \cdot \left[e^{u}\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2 \cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

In der Variante 2 wurden untere und obere Grenze des bestimmten Integrals ebenfalls substituiert. In den meisten Fällen wird dadurch der Rechenaufwand etwas verringert.

$$f(x) := e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.7668$$



Training EFKT_03:

Integration einfacher e- Funktionen.
Integrieren Sie folgende Funktionen.
Das Ergebnis von Aufgabe 1 bis 4 ist durch eine Probe zu kontrollieren.

1.	$\int -e^{-x}\,dx$	2.	$\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$
3.	$\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$	4.	$\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx$
5.	$\int_0^2 e^{1-x}\,dx$	6.	$\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$
7.	$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$	8.	$\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx$
9.	$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$	10.	$\int_0^4 -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$