Berechnung einfacher Flächen mittels Integral

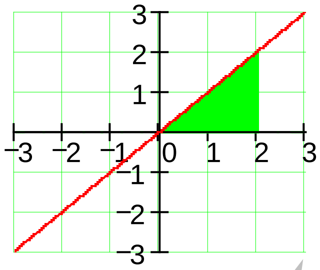
Beispiel 1:

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $0 \le x \le 2$

$f(x) = x$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2\text{ FE}}}$$



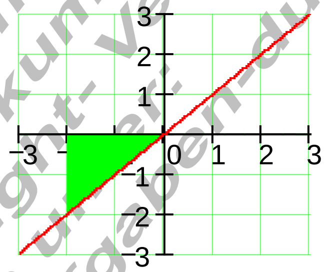
Beispiel 2:

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $-2 \le x \le 0$

$f(x) = x$

$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^0$$

$$= \frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 0 - \frac{4}{2} = \underline{\underline{-2\text{ FE}}}$$



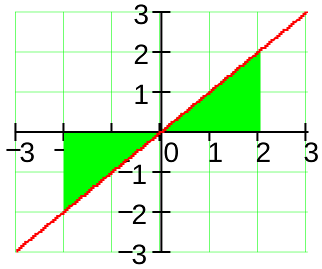
Beispiel 3

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $-2 \le x \le 2$

$f(x) = x$

$$\int_{-2}^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = \underline{\underline{0\text{ FE}}}$$



Die Rechnung zeigt, dass die Fläche oberhalb der x – Achse positiv und die unterhalb der x – Achse negativ zählt.
Im 3. Beispiel heben sich die Flächen gegenseitig auf.

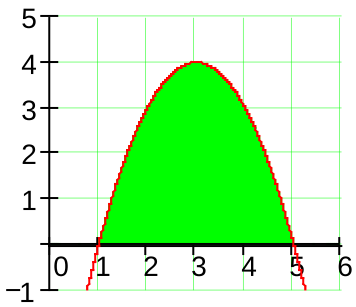
Soll die physikalische Fläche ermittelt werden, so muss das Integral aufgeteilt und mit Beträgen gerechnet werden.

$$\int_{-2}^2 x\,dx = \left|\int_{-2}^0 x\,dx\right| + \left|\int_0^2 x\,dx\right| = \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^0\right| + \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2\right| = \left|\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right| + \left|\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right| = 2 + 2 = \underline{\underline{4\text{ FE}}}$$

Beispiel 4

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $1 \le x \le 5$

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$

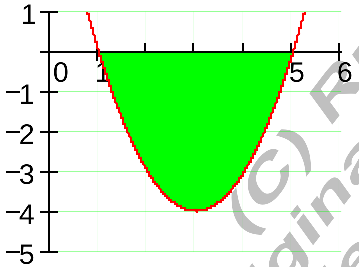


$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_1^5$$
$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right)$$
$$= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$$
$$= -\frac{125}{3} + \frac{225}{3} - \frac{75}{3} + \frac{1}{3} - \frac{9}{3} + \frac{15}{3} = \frac{32}{3}$$
$$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{10{,}67\ \text{FE}}}$$

Beispiel 5

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $1 \le x \le 5$

$f(x) = x^2 - 6x + 5$



$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_1^5$$
$$= \left(\frac{5^3}{3} - \frac{6\cdot 5^2}{2} + 5\cdot 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{6\cdot 1^2}{2} + 5\cdot 1\right)$$
$$= \left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)$$
$$= \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{32}{3}$$
$$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10{,}67\ \text{FE}}}$$

Satz über Flächenlage und Vorzeichen.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \wedge \text{ Fläche liegt oberhalb der x - Achse}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \wedge \text{ Fläche liegt unterhalb der x - Achse}$$

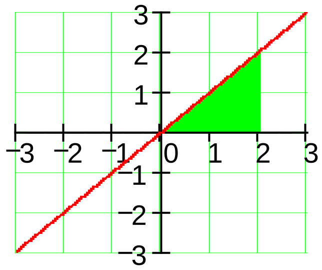
Vertauschung der Integrationsgrenzen

Was geschieht, wenn die Integrationsgrenzen vertauscht werden?

Beispiel 6

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $0 \le x \le 2$

$f(x) = x$



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2\ \text{FE}}}$$

Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_2^0 f(x)\,dx = \int_2^0 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^0$$

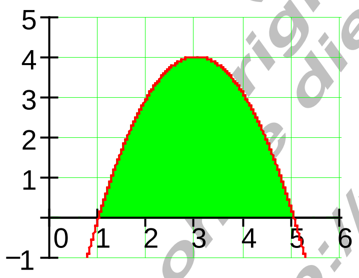
$$= \frac{0^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 0 - \frac{4}{2} = \underline{\underline{-2\ \text{FE}}}$$

Damit die Fläche positiv wird, muss mit (-1) multipliziert werden.

Beispiel 7

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $1 \le x \le 5$

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$



$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$\approx \underline{\underline{10,67\ \text{FE}}}$$

Die Integrationsgrenzen werden vertauscht.

$$A = \int_5^1 f(x)\,dx = \int_5^1 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_5^1$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right) - \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) - \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} + \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} = -\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10,67\ \text{FE}}}$$

Satz über Vorzeichen und Integrationsgrenzen.

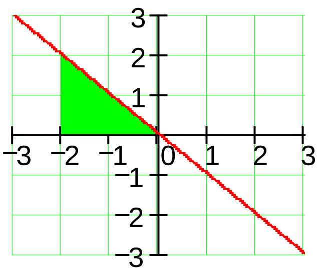
Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx}$$

Beispiel 8

Gesucht ist die Fläche zwischen f(x) und der x - Achse im Intervall $-2 \le x \le 0$

$f(x) = -x$



$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx = -\int_{-2}^{0} x\,dx$$

Vertauschung der Grenzen:

$$= \int_{0}^{-2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{-2}$$

$$= \frac{(-2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2\,\text{FE}}}$$

<u>Training: INT02</u>

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale.

1.	$\int_{1}^{3} x\,dx$	2.	$\int_{0}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx$
3.	$\int_{-2}^{2} 4\,dx$	4.	$\int_{3}^{4} dx$
5.	$\int_{0}^{4} (2x - 5)\,dx$	6.	$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx$
7.	$\int_{-3}^{3} \left(x^3 + 2x\right) dx$	8.	$\int_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx$
9.	$\int_{-4}^{4} \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx$	10.	$\int_{2}^{3} (3x - 6)^3\,dx$

Ausführliches Beispiel:

$$\int_1^3 \left(5x^2-3x+7\right)dx = \left[\underbrace{\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+7x}_{F(x)}\right]_1^3 = \left[\underbrace{\frac{5}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2+7\cdot 3}_{F(3)}\right]-\left[\underbrace{\frac{5}{3}\cdot 1^3-\frac{3}{2}\cdot 1^2+7\cdot 1}_{F(1)}\right]$$

$$= 45-\frac{27}{2}+21 \qquad -\frac{5}{3}+\frac{3}{2}-7$$

$$= 45+21-7-\frac{27}{2}+\frac{3}{2}-\frac{5}{3}$$

$$= 59-12-\frac{5}{3}$$

$$= 47-\frac{5}{3}$$

$$= \frac{141}{3}-\frac{5}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{136}{3}}}$$

Ergebnisse:

1.	$\int\limits_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \underline{\underline{4}}$
2.	$\int\limits_0^3 \left(x^2-1\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^3 = \underline{\underline{6}}$
3.	$\int\limits_{-2}^2 4\,dx = \left[4x\right]_{-2}^2 = \underline{\underline{16}}$
4.	$\int\limits_3^4 dx = \left[x\right]_3^4 = \underline{\underline{1}}$
5.	$\int\limits_0^4 (2x-5)\,dx = \left[x^2-5x\right]_0^4 = \underline{\underline{-4}}$
6.	$\int\limits_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3-4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \approx \underline{\underline{-15{,}085}}$
7.	$\int\limits_{-3}^3 \left(x^3+2x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^3 = \underline{\underline{0}}$
8.	$\int\limits_{-1}^2 \left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^2 = \underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$
9.	$\int\limits_{-4}^4 \left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^4 = \underline{\underline{\frac{512}{15}}}$
10.	$\int\limits_2^3 (3x-6)^3\,dx = \left[\frac{1}{12}(3x-6)^4\right]_2^3 = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$