Beispiel 4 zur Kurvendiskussion

Beispiele in Kurzform:

Beispiel 4:

1. *Definitionsbereich:*

$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$ $\quad \boxed{D = \mathbb{R}}$

2. *Symmetrien:*

Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$ da nur gerade Exponenten

3. *Extrema:*

Ableitungen:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{Min}(0 \mid -5{,}06)}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max1}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max1}(1{,}5 \mid 0)}$$

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max2}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max2}(-1{,}5 \mid 0)}$$

4. *Wendepunkte:*

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0{,}87$$

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0{,}87$$

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(0{,}87 \mid -2{,}25)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-0{,}87 \mid -2{,}25)}$$

5. ***Achsenschnittpunkte:***

$$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_y(0 \mid -5{,}06)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$$

Bisher bekannte Nullstellen: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$ (siehe Extrempunkte)

Polynomdivision: $\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\underline{-\left(-x^4 + \frac{9}{4}x^2\right)}$$

$$\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}$$

$$\underline{-\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}\right)}$$

$$-x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = \pm\frac{3}{2}$$

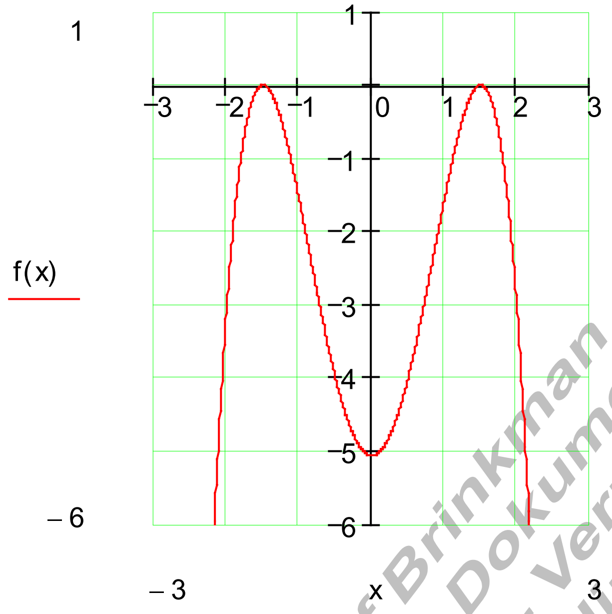
Nullstellen: $\boxed{P_{x1/2}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right)}$; $\boxed{P_{x3/4}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)}$

6. ***Der Graph:***

Wertetabelle:

$f(-2) \approx -3{,}06 = f(2)$; $f(-1) \approx -1{,}56 = f(1)$

		P_{Max2} $P_{x3/4}$		P_{W2}	P_{Min} P_y	P_{W1}		P_{Max1} $P_{x1/2}$	
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}87$	0	$0{,}87$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	$-3{,}06$	0	$-1{,}56$	$-2{,}25$	$-5{,}06$	$-2{,}25$	$-1{,}56$	0	$-3{,}06$



7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung:

für $x_0 = -1$ (links von P_{W2}) $f''(-1) = -3 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \ \left]-\infty; -\sqrt{\frac{3}{4}}\right[}$

für $x_0 = 0$ (zwischen P_{W1} und P_{W2}) $f''(0) = 9 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex)} \ \left]-\sqrt{\frac{3}{4}}; \sqrt{\frac{3}{4}}\right[}$

für $x_0 = 1$ (rechts von P_{W1}) $f''(1) = -3 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \ \left]\sqrt{\frac{3}{4}}; \infty\right[}$

Monotonie:

streng monoton wachsend für $]-\infty; -1,5[$

streng monoton fallend für $]-1,5; 0[$

streng monoton wachsend für $]0; 1,5[$

streng monoton fallend für $]1,5; \infty[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4\left(-1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4}\right) \\ = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4}\right)}_{-1} = -1 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} x^4 = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

Berechnungen mit dem GTR Casio fx-CG20

3GTR

Berechnen Sie die Extrempunkte von $f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$

Funktionsgleichung mit dem
Grafikeditor eingeben und anzeigen:

$\boxed{\text{MENU}}$ 5 (Graph)

$\boxed{(-)}\ \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\wedge}\ 4 \rightarrow \boxed{+}\ 9\ \boxed{a^{b/c}}\ 2 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ 81\ \boxed{a^{b/c}}\ 16\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

Um den Graphen optimal anzuzeigen, wird das Betrachtungsfenster auf x: [-3 ; 3] und y: [-6 ; 1] eingestellt.

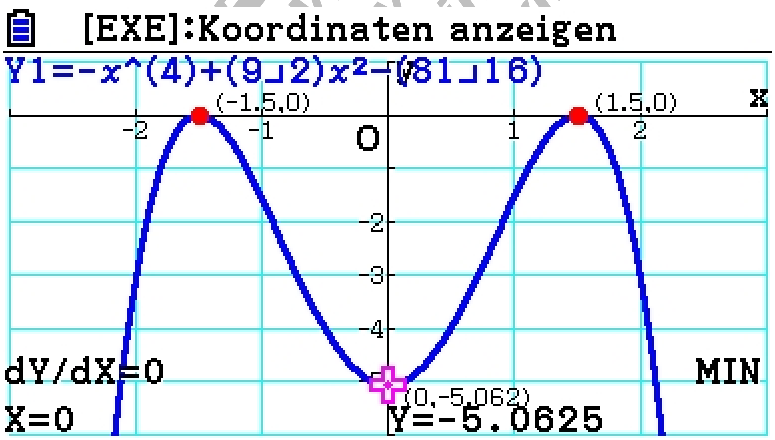
$^{S}\boxed{\text{V-Window}}\ \boxed{(-)}\ 3\ \boxed{\text{EXE}}\ 3\ \boxed{\text{EXE}} \downarrow\downarrow \boxed{(-)}\ 6\ \boxed{\text{EXE}}\ 1\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

rel. Max: $^{S}\boxed{\text{G-Solv}}\ \{\text{MAX}\}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (-1{,}5 \mid 0) \rightarrow \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (1{,}5 \mid 0)$

rel. Min: $^{S}\boxed{\text{G-Solv}}\ \{\text{Min}\}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0 \mid -5{,}0625)$

P_{max1} (-1,5 | 0) ; P_{max2} (1,5 | 0) ; P_{min} (0 | -5,0625)



Mit [EXIT] gelangt man zurück in den Grafikeditor.

3GTR	Extremwertberechnung von $f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$ im Run Matrix Menü
	Die Nullstellen der 1. Ableitung von f(x) werden mit **SolveN** berechnet und angezeigt. Setzt man einen der angezeigten Werte in f(x) ein, so erhält man den dazugehörigen Extremwert, falls dieser existiert. $\text{SolveN}\left(\frac{d}{dx}\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right)\|_{x=\square}\right) \Rightarrow \left\{-\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right\}$ $-\frac{3}{2} \rightarrow X \Rightarrow -\frac{3}{2}$ $-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow 0 \Rightarrow P_{max1}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)$ $0 \rightarrow X \Rightarrow 0$ $-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow -\frac{81}{16} \Rightarrow P_{min}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right)$ $\frac{3}{2} \rightarrow X \Rightarrow \frac{3}{2}$ $-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow 0 \Rightarrow P_{max2}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right)$

4GTR

Berechnen Sie den Wendepunkte von $f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$

Im Grafikeditor trägt man unterhalb von Y1 f' und f'' wie folgt ein:

$\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \{d/dx\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \left\{d^2/dx^2\right\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

Um die Graphen optimal anzuzeigen, wird das Betrachtungsfenster auf x: [-3 ; 3] und y: [-6 ; 8] eingestellt.

$^S\boxed{V-\text{Window}}\ \boxed{(-)}\ 3\ \boxed{\text{EXE}}\ 3\ \boxed{\text{EXE}}\ \downarrow\downarrow\ \boxed{(-)}\ 6\ \boxed{\text{EXE}}\ 8\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

Die Wendestellen befinden sich dort, wo die zweite Ableitung Null ist.

$^S\boxed{G-\text{Solv}}\ \{\text{ROOT}\}\ f''$ selektieren

$\boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \rightarrow \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (-0{,}866..\,|\,0)\,;(0{,}866..\,|\,0)$

Die Wendestellen liegen bei x_{w1} = -0,866.. und bei x_{w2} = 0,866..

Der zugehörige Wendepunkt hat die Koordinaten:

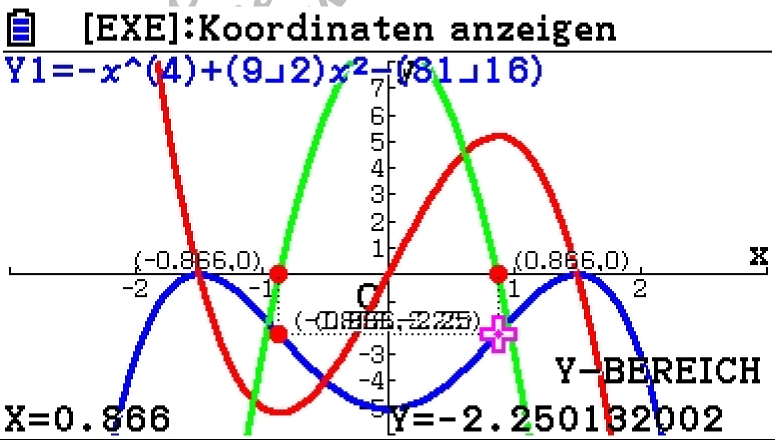
$^S\boxed{G-\text{Solv}}\ \boxed{F6}\ \{Y-\text{CAL}\}\ f(x)$ auswählen

$\boxed{\text{EXE}}\ \boxed{(-)}\ 0.866\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (-0{,}866\,|\,-2{,}25)$

$^S\boxed{G-\text{Solv}}\ \boxed{F6}\ \{Y-\text{CAL}\}\ f(x)$ auswählen

$\boxed{\text{EXE}}\ 0.866\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0{,}866\,|\,-2{,}25)$

P_{w1} (-0,866 | -2,25) ; P_{w2} (0,866 | -2,25)



4GTR	Wendepunktkoordinaten in Bruchdarstellung mit **SolveN**
	Die Nullstellen von f''(x) = $-12x^2 + 9$ liefern die Wendestellen. Die Nullstellen von f''(x) also x_{w1} und x_{w2} werden mit **SolveN** berechnet und in Liste 3 abgespeichert. $\text{SolveN}\left(-12x^2+9\right) \to \text{List } 3 \Rightarrow \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ $\text{List } 3\,[1] \to X \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow -\frac{9}{4}$ $\text{List } 3\,[2] \to X \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ $-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow -\frac{9}{4}$ $P_{w1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \mid -\frac{9}{4}\right); P_{w2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mid -\frac{9}{4}\right)$

5GTR

Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von $f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$

Die Grafik der Funktion ist im Betrachtungsfenster aufgerufen.
Mit ^{S}[Sketch] {Cls} kann der Graph neu gezeichnet werden.

Um den Graphen optimal anzuzeigen, wird das Betrachtungsfenster auf x: [-3 ; 3] und y: [-6 ; 1] eingestellt.

$^{S}\boxed{\text{V}-\text{Window}}\ \boxed{(-)}\ 3\ \boxed{\text{EXE}}\ 3\ \boxed{\text{EXE}}\downarrow\downarrow\boxed{(-)}\ 6\ \boxed{\text{EXE}}\ 1\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

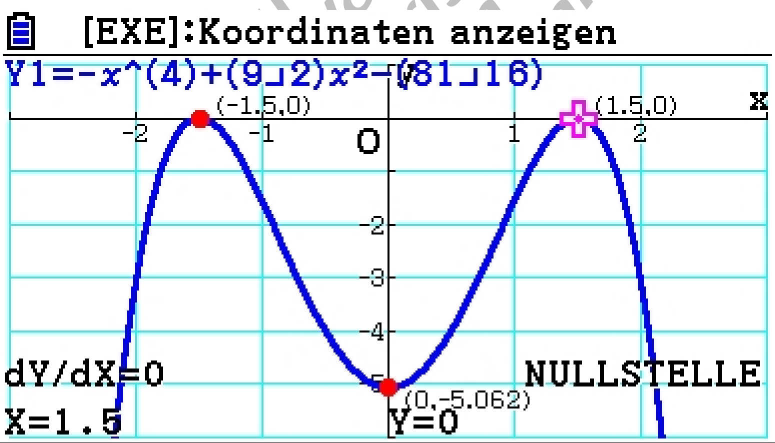
Schnittpunkt mit der y-Achse:

$^{S}\boxed{\text{G}-\text{Solv}}\ \{\text{Y}-\text{ICEPT}\}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0\,|\,-5{,}0625)$

Nullstellen oder Schnittpunkte mit der x-Achse:

$^{S}\boxed{\text{G}-\text{Solv}}\ \{\text{ROOT}\}\ \boxed{\text{EXE}}\ (-1{,}5\,|\,0) \rightarrow \boxed{\text{EXE}}\ (1{,}5\,|\,0)$

P_y (0 | -5,0625) und $P_{x1/2}$ (-1,5 | 0) doppelte Nullstelle
$P_{x3/4}$ (1,5 | 0) doppelte Nullstelle



6GTR

Wertetabelle erstellen für $f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$

Für das Intervall [-3 ; 3] soll eine Wertetabelle mit der Schrittweite 1 erstellt werden.

$\boxed{\text{MENU}}$ 7 $\quad$ (Tabelle)

{SET} $\boxed{(-)}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ 1 $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$

{TABLE}

Wertetabelle (gerundet auf 2 Stellen):

			P_{max1} $P_{x1/2}$		P_{w1}	P_{min} P_y
x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}87$	0
y	$-3{,}45{,}56$	$-3{,}06$	0	$-1{,}56$	$-2{,}25$	$-5{,}06$
	P_{w2}		P_{max2} $P_{x3/4}$			
x	0,87	1	1,5	2	3	
y	$-2{,}25$	$-1{,}56$	0	$-3{,}06$	$-45{,}56$	