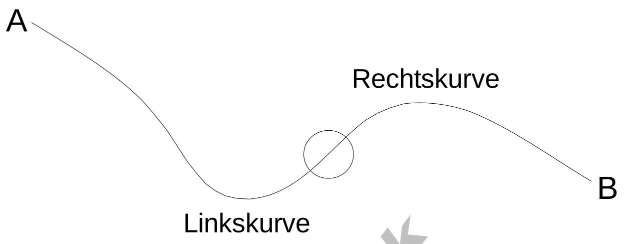
Wendepunkte und Wendestellen

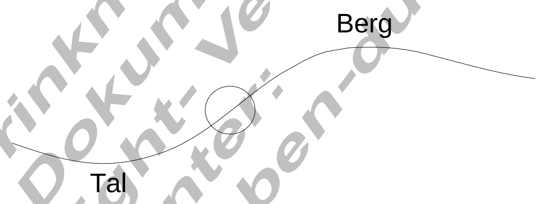
Vorbetrachtungen und Begriffserklärungen

Sie starten mit dem Fahrrad bei A, durchfahren eine S – Kurve und fahren dann weiter bis B. Betrachten Sie mal die jeweilige Lenkerstellung auf der Fahrstrecke. Nach Durchfahren der Linkskurve (Lenkerstellung nach links) fahren sie durch die Rechtskurve (Lenkerstellung nach rechts).



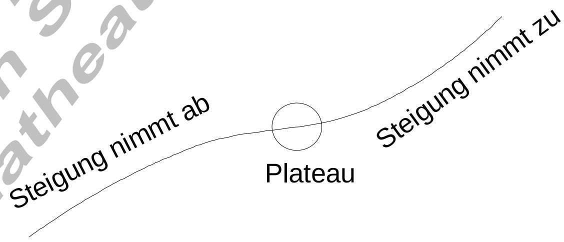
Irgendwo zwischen der Linkskurve und der Rechtskurve muss der Lenker mal gerade gestanden haben. Diesen Wechsel zwischen Linkskurve und Rechtskurve nennen wir Wendepunkt.

Sie fahren mit dem Fahrrad durch hügeliges Gelände. Nachdem Sie die Talsohle durchfahren haben, beginnt die Straße anzusteigen. Erst sanft, dann immer stärker. Dann nimmt die Steigung wieder ab um oben auf dem Berg den Wert Null zu erreichen.



Irgendwo auf der Strecke war der Anstieg am größten. Dort befindet sich der Wendepunkt.

Eine andere Situation des Radfahrers ist nebenstehender Grafik zu entnehmen: Bei einer Bergfahrt nimmt die Steigung zunächst ab, um dann erneut wieder anzusteigen. Dazwischen befindet sich ein Gebiet mit geringer Steigung (Plateau). Im Bereich des Plateaus ist der Anstieg der Strecke am geringsten. Dort befindet sich der Wendepunkt.



Wir wissen, das die erste Ableitung einer Funktion die Steigungsfunktion ist, aus deren Graphen man die Steigung ablesen kann. Da der Wendepunkt der Punkt mit der größten oder auch kleinsten Steigung sein soll, findet man ihn, indem man die ***Extremwerte der Ableitungsfunktion*** bestimmt. Das Verfahren ist das gleiche, wie bei der Bestimmung der Ursprungsfunktion f(x), bezieht sich aber jetzt auf die Ableitungsfunktion f'(x).

Fassen wir die Bedingungen für Wendepunkte zusammen:

Hinreichende Bedingung für Extremwerte	$f'(x_E) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_E) \neq 0$
<u>Hinreichende Bedingung für Wendepunkte</u>	$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$

Kommentiertes Beispiel:

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

2. Zweite Ableitung Null setzen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob ein Wendepunkt vorliegt :

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

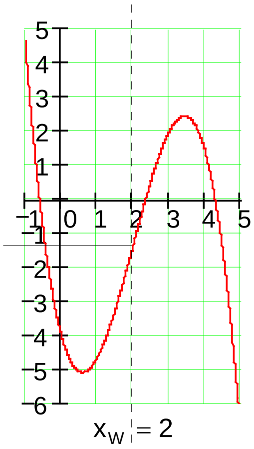
$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow P_W\left(2 \,\middle|\, -\frac{4}{3} \approx -1{,}33\right)$$

Die Graphen:

$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$

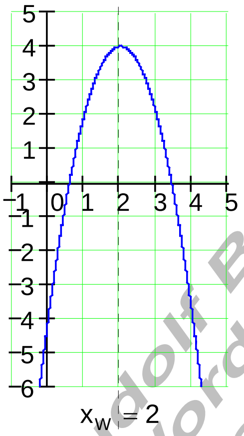
$f(2) = -\frac{4}{3}$

$P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$



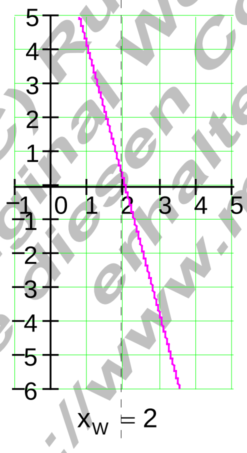
$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$

Extremwert von f ' (x) bei $x_W = 2$



$f''(x) = -4x + 8$

Nullstelle von f '' (x) bei $x_W = 2$



Bemerkung zur Krümmung:

In der Wendestelle x_W ändert sich die Krümmung des Graphen von $f(x)$

Für die Krümmung in einem beliebigen Punkt x_0 gilt:

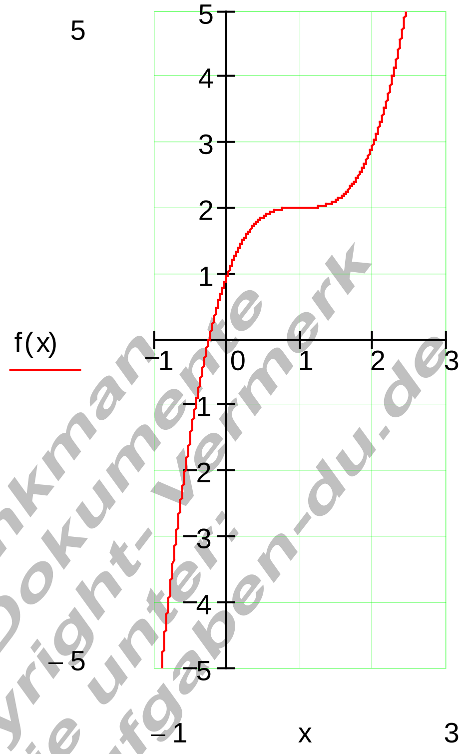
$f''(x_0) > 0$ bedeutet der Graph von $f(x)$ ist linksgekrümmt (konvex)

$f''(x_0) < 0$ bedeutet der Graph von $f(x)$ ist rechtsgekrümmt (konkav)

Der Sattelpunkt

Eine besondere Form des Wendepunktes ist der ***Sattelpunkt.***
Das ist ein Wendepunkt mit der Steigung Null.
Nähert man sich von links, so glaubt man es käme ein relatives Maximum.
Nähert man sich von rechts, so glaubt man es käme ein relatives Minimum.
Es gibt jedoch keine Extremwerte.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$



Wir untersuchen diesen Fall nun mathematisch:

Die Ableitungen:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f''(x) = 6x - 6$

$f'''(x) = 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$

$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \\ f'''(1) = 6 \end{array}\right| \Rightarrow$ Wendestelle bei $x = 1$ $\Bigg| \Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x = 1$

Die Bedingungen für die Existenz eines Wp. sind erfüllt.
Da wegen $f''(1) = 0$ kein Extremwert existiert, handelt es sich bei dem Wendepunkt um einen Sattelpunkt.
Der Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Ermittlung der Wendetangente

Die Tangente an den Funktionsgraphen im Wendepunkt heißt Wendetangente.
Die Gleichung der Wendetangente wird ebenso bestimmt wie die Tangentengleichung in einem beliebigen Punkt des Graphen.

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$

$f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$

$\Rightarrow x_W = 4 \text{ und } f'''(x_W) = \frac{3}{2} \neq 0$

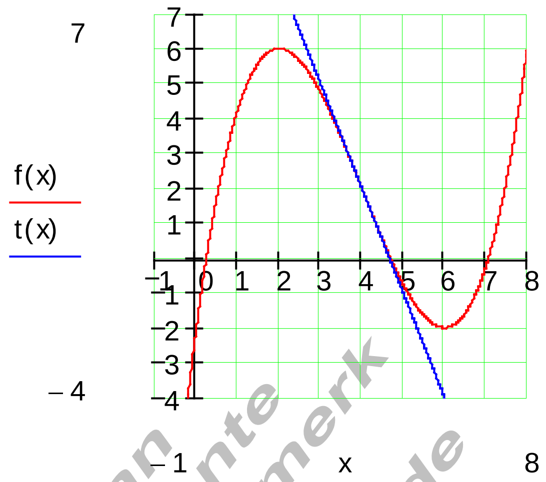
$f(x_W) = f(4) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(4\,|\,2)}}$

Tangentengleichung für x_W

$t(x) = f'(x_W)(x - x_W) + f(x_W)$

mit $f'(x_W) = f'(4) = -3$ wird

$t(x) = -3(x-4) + 2 = \underline{\underline{-3x + 14}}$



Die Wendetangente schneidet den Graphen von $f(x)$ im Wendepunkt $P_W(4\,|\,2)$.
Sie hat die Gleichung:
$t(x) = -3x + 14$

<u>Beispiel aus der Kostenrechnung</u>

Für welche Ausbringungsmenge x wird bei gegebener Kostenfunktion der Kostenzuwachs am geringsten?

$K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 18 \quad D_K = \{x\,|\,0 \le x \le 6\}$

Zeichnen Sie $K(x)$ und $K'(x)$ in ein Koordinatensystem.

Der Kostenzuwachs entspricht der momentanen Änderungsrate von $K(x)$

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 14$

Der geringste Kostenzuwachs ist im relativen Minimum von $K'(x)$ zu finden.

$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 2 = x_W$ ist der Wendepunkt von $K(x)$

da $K'''(x) = 6 > 0$ ist.

An der Stelle x_W wird $K'(x)$ minimal.

$K''(x_W) = K''(2) = 2$ bedeutet:

Bei einer Ausbringungsmenge von $\underline{\underline{x = 2 \text{ ME}}}$

ist der Kostenzuwachs am geringsten.

Er beträgt $\underline{\underline{2 \text{ GE / ME}}}$

$K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 18$

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 14$