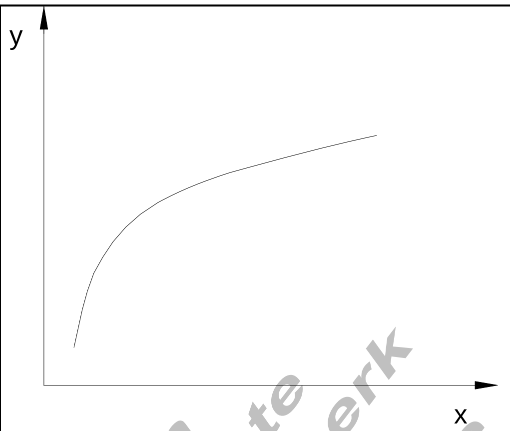
Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

Gegeben ist eine Funktion

$$y = f(x)$$

und der dazugehörige Graph

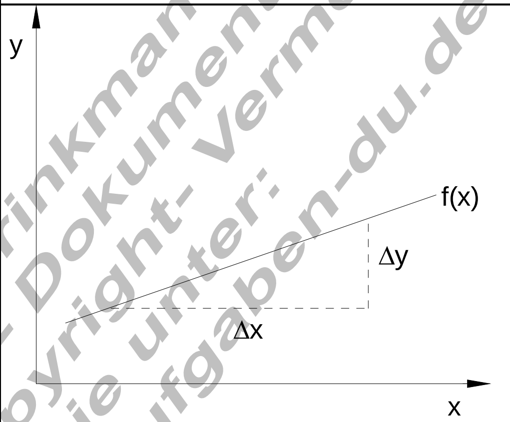
Betrachtet man das Steigungsverhalten der Funktion, so stellt man fest, dass die Steigung der Funktion in fast allen Punkten verschieden ist.



Es existiert also keine konstante Steigung wie bei einer linearen Funktion mit

$f(x) = a_1x + a_0$ mit

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$

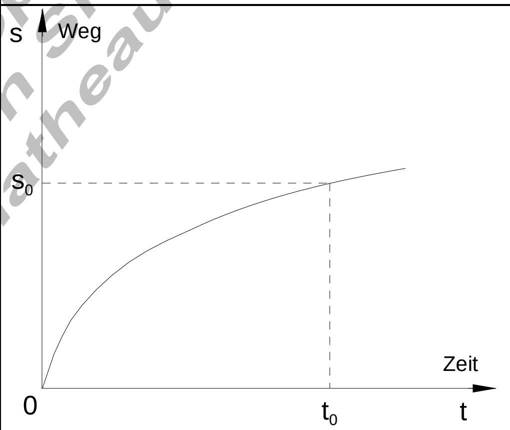


In vielen Fachdisziplinen ist es notwendig, das Änderungsverhalten (Steigungsverhalten) von Abläufen (Funktionen) zu untersuchen.

So ist die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ in einem Weg – Zeit – Diagramm gleich der Steigung der Funktion in dem betrachteten Augenblick.

Mit Hilfe der Differentialrechnung lässt sich das Steigungsproblem lösen.

Die Bestimmung der Steigung einer Funktion an einer vorgegebenen Stelle x_0 nennt man differenzieren.



$t_0 \triangleq$ betrachteter Augenblick

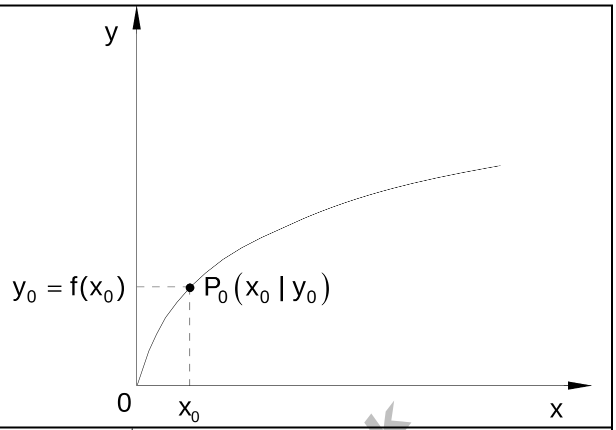
$s_0 \triangleq$ der bis zu diesem Augenblick zurückgelegte Weg

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x)$$

und ihr Graph.

Die Steigung im Punkt $P_0(x_0 \mid y_0)$ soll ermittelt werden.

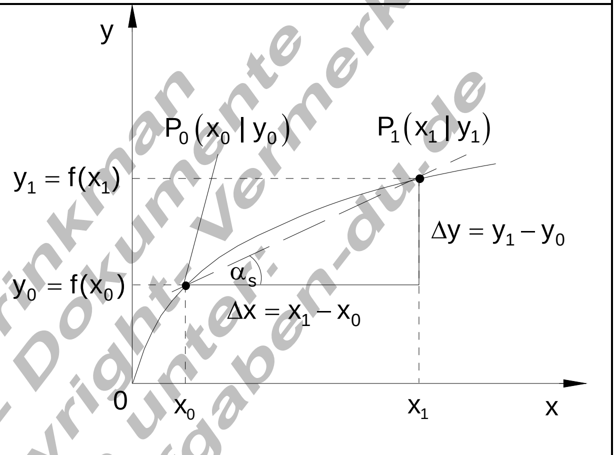


Zur Lösung des Problems geht man davon aus, zunächst die Steigung ungefähr zu ermitteln.

Dazu wählt man einen weiteren Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$ nahe dem Punkt P_0.

Die Gerade, die die beiden Punkte verbindet, die ***Sekante***, weist eine Steigung auf, die der ***„mittleren Steigung“*** der Funktion zwischen den Punkten P_1 und P_0 entspricht.

Diese wird über das ***Steigungsdreieck*** bestimmt.



$$\tan\alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

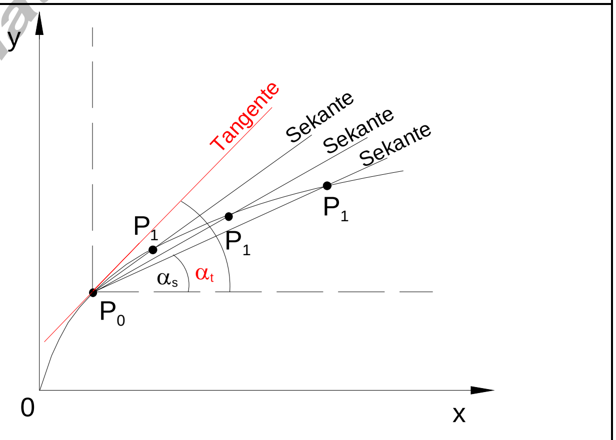
$\alpha_s \mathrel{\hat{=}}$ Steigungswinkel der Sekante

$a_s \mathrel{\hat{=}}$ Steigungsfaktor der Sekante

Legt man den Punkt P_1 näher an P_0, so entspricht die Steigung der neuen Sekante schon eher der Steigung der Funktion im Punkt P_0, die ermittelt werden soll.

Führt man dieses Verfahren konsequent fort, und nähert den Punkt P_1 immer mehr dem Punkt P_0 an, so entsteht als Grenzlage eine Gerade, die den Funktionsgraphen nur noch im Punkt P_0 berührt, die ***Tangente*** an den Funktionsgraphen im Punkt P_0.

Die Steigung der Tangente entspricht dann genau der Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P_0.



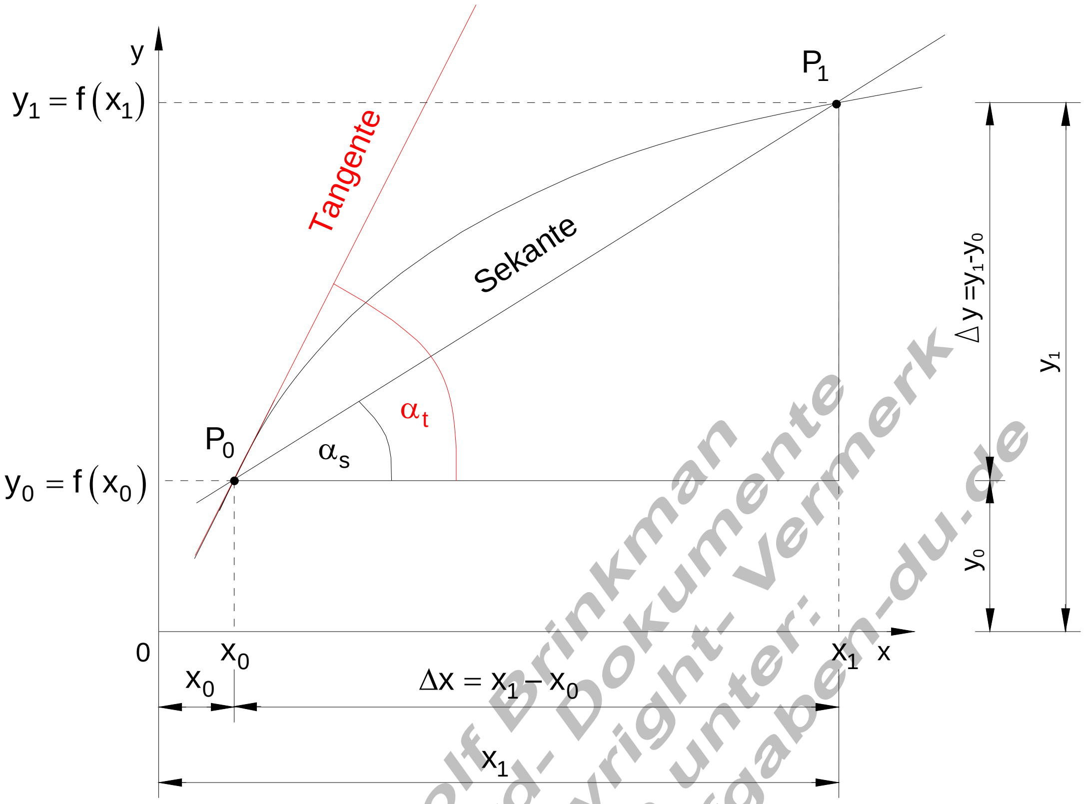
$\alpha_t =$ Steigungswinkel der Tangente

$a_t =$ Steigungsfaktor der Tangente

Dieses Verfahren kann man mathematisch auch durch einen ***Grenzwertbildung*** ausdrücken.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

Differenzenquotient und Differentialquotient



$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$ Sekantensteigung (mittlere Änderungsrate)

$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$

Setzt man für x_1 die rechte Seite der Gleichung ein, so gilt für die Sekantensteigung:

$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate)

Zur Tangentensteigung gelangt man über die Grenzwertbildung

$a_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ Differentialquotient (momentane Änderungsrate)

oder kurz: $a_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Definition:	Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$ heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

Definition:	Die <u>erste Ableitung einer Funktion</u> an der Stelle x_0 gibt die Steigung der Tangente an, die den Funktionsgraphen im Punkt $P_0\ (x_0 \mid y_0)$ berührt und ist damit zugleich die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt $P_0\ (x_0 \mid y_0)$. Man sagt auch Steigung der Funktion. Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$ $a_t = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

<u>Bildung der Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 und der Ableitungsfunktion</u>

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x^2$

Gesucht wird die Ableitung an der Stelle $x = x_0$ und speziell für $x_0 = 2$

Zuerst der <u>Differenzenquotient:</u>

$x = x_0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \cancel{- x_0^2}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Nun über die Grenzwertbildung zum <u>Differentialkoeffizienten:</u>

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

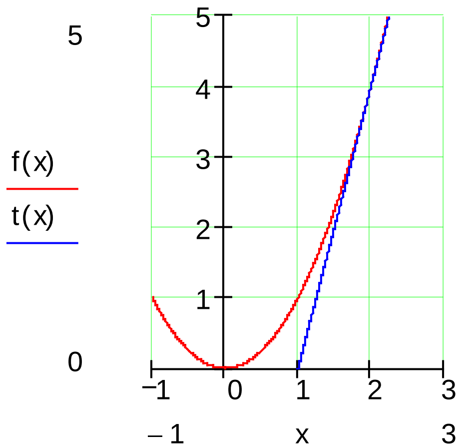
also $\underline{\underline{f'(x_0) = 2x_0}}$ für $x_0 = 2$ gilt: $f'(2) = 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$

An der Stelle $x_0 = 2$ ist die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^2$ gleich 4, d.h. die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 2$ die Steigung 4.

Das Ergebnis kann am Graphen der Funktion überprüft werden, in dem man im Punkt

$P_0(x_0 \mid y_0) = P_0(2 \mid 4)$

die Tangente anlegt und über ein Steigungsdreieck die Steigung ermittelt.

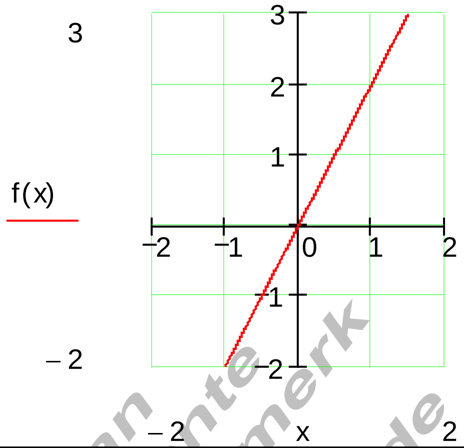


Beispiel: $y = f(x) = x^2$
Gesucht ist die Ableitung der Funktion an jeder beliebigen Stelle x_0

$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

Der Graph stellt eine Gerade dar,
$f'(x) = 2x$ heißt $\underline{\text{Ableitungsfunktion.}}$



Merke:	Wird eine Funktion abgeleitet, so entsteht wieder eine Funktion. Diese wird ***Ableitungsfunktion*** genannt. Die Funktionswerte der Ableitungsfunktion stellen die Steigungen der Stammfunktion in jedem Punkt da, deshalb nennt man sie auch Steigungsfunktion.

Beispiele zur Berechnung der Ableitung

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x$
Gesucht wird die Ableitung an der Stelle x_0 und die Ableitungsfunktion

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = \underline{\underline{1}}$$

also $\underline{\underline{f'(x_0) = 1}}$ ist die Ableitung an der Stelle x_0

Die Ableitungsfunktion lautet: $\underline{\underline{f'(x) = 1}}$

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$

Gesucht wird die Ableitung an der Stelle x_0 und die Ableitungsfunktion

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x_0^2$$

also $\underline{\underline{f'(x_0) = 3x_0^2}}$ ist die Ableitung an der Stelle x_0

Die Ableitungsfunktion lautet: $\underline{\underline{f'(x) = 3x^2}}$

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$

Gesucht wird die Ableitung an der Stelle x_0 und die Ableitungsfunktion

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)} - \frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0\cdot\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2 + x_0\cdot\Delta x}\right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

also $\underline{\underline{f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}}}$ ist die Ableitung an der Stelle x_0

Die Ableitungsfunktion lautet: $\underline{\underline{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}}$

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\sqrt{x}$

Gesucht wird die Ableitung an der Stelle x_0 und die Ableitungsfunktion

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

also $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ist die Ableitung an der Stelle x_0

Die Ableitungsfunktion lautet: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ableitungen von Funktionen der Art $f(x) = x^q$

Rechnerisch wurde bisher folgendes ermittelt:

Funktion	Ableitungsfunktion	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Vergleicht man diese fünf Ableitungen miteinander, so ist zu vermuten, dass folgendes Bildungsgesetz gilt:

Potenzregel (ohne Beweis)	
1.) Alten Exponenten als Faktor vor die Variable x setzen. 2.) Neuer Exponent ist alter Exponent vermindert um eins.	$f(x)=x^q \quad\Rightarrow\quad f'(x)=q\cdot x^{q-1} \quad$ mit $q\in\mathbb{Q}$

Beispiel:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

Ableitung von Funktionen der Art $f(x) = c \cdot u(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ und konstant

Konstantenregel	
Eine Funktion ist zusammengesetzt aus einer elementaren Funktion multipliziert mit einer Konstanten. Dann ist die Ableitung dieser Funktion gleich der Ableitung der Elementarfunktion multipliziert mit der Konstanten.	$f(x) = c \cdot u(x)$ mit $c = \text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$

Beweis:

$$f(x_0) = c \cdot u(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} c}_{c} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$$

Beispiel:

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

Ableitung von Funktionen der Art $f(x) = u(x) + v(x)$

Summenregel	
Eine Funktion ist zusammengesetzt aus der Summe zweier Funktionen. Dann ist die Ableitung der Funktion gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Funktionen.	$f(x) = u(x) + v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Beweis:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} + \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

Beispiele:

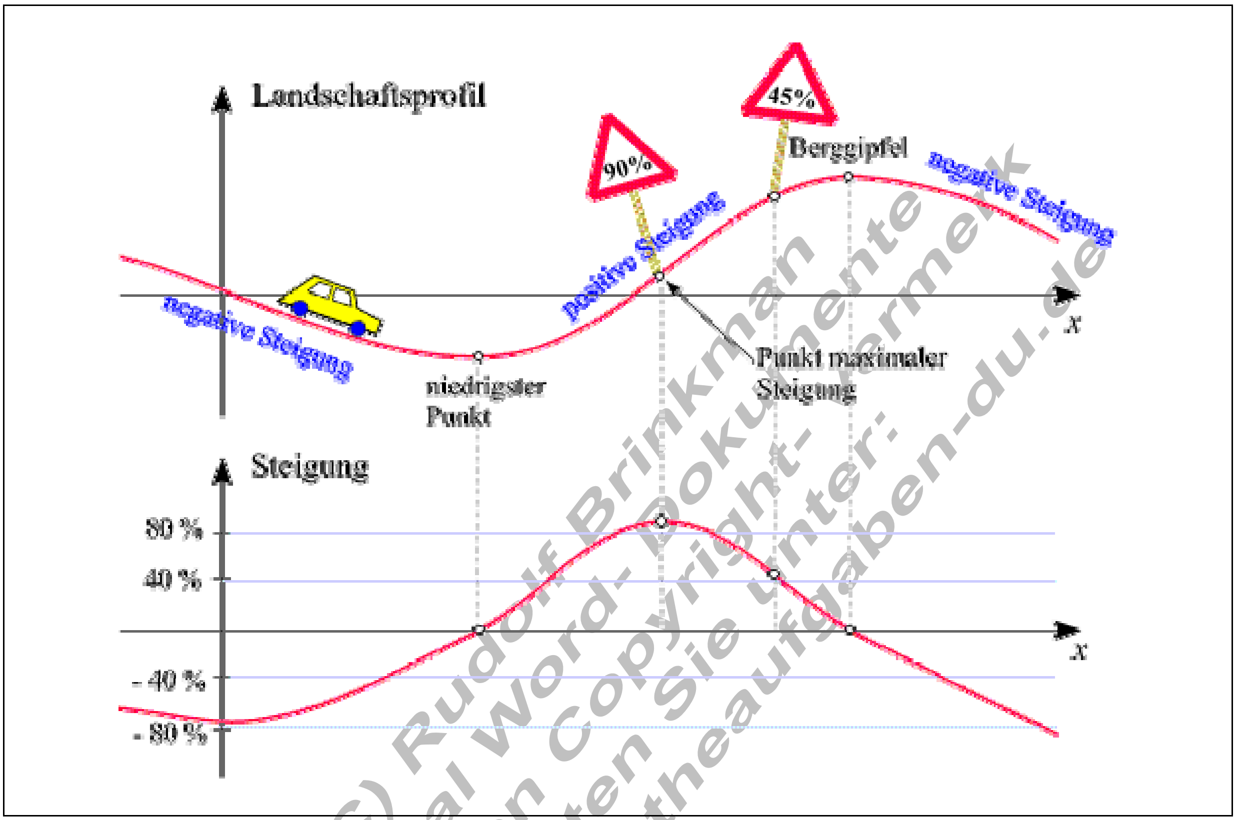
$$f(x) = 5x^2 + 3x \quad u(x) = 5x^2 \quad v(x) = 3x$$

$$\Rightarrow u'(x) = 10x \quad v'(x) = 3$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$$

Steigungen in der Landschaft

Stellen wir uns einen Funktionsgraphen als Straße vor, die in einer Landschaft auf- und abführt, so lässt sich schön illustrieren, wie Eigenschaften eines Graphen mit der Ableitung zusammenhängen:

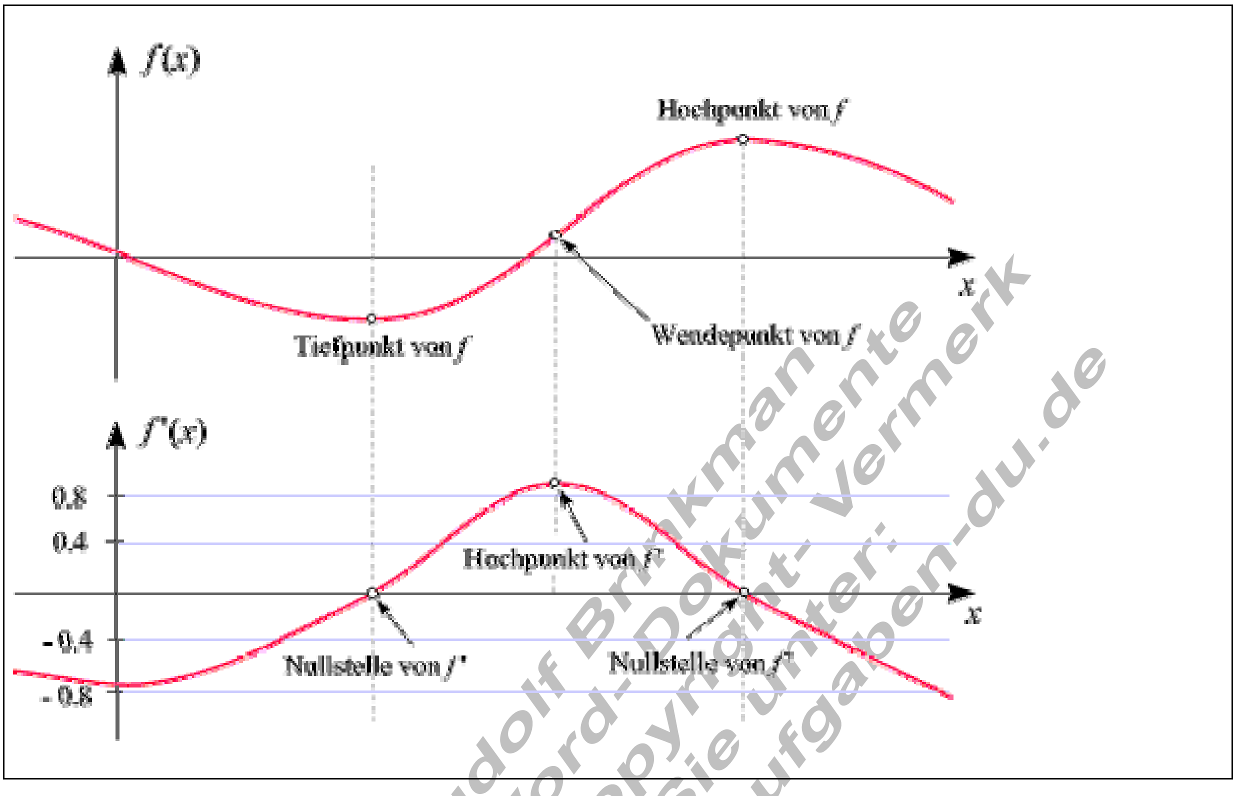


Unterhalb des Straßenverlaufs ist, in einem eigenen Diagramm, die Steigung der Straße in jedem Punkt dargestellt, wodurch sich eine zweite Kurve ergibt.
Sehen Sie sich die Diagramme genau an und versuchen Sie, die Details des zweiten aus den Eigenschaften des ersten zu verstehen.

Wo die Straße ihren niedrigsten Punkt hat, hat die Steigung den Wert 0%, d.h. „für einen Augenblick“ ist das Auto, wenn es diesen Punkt passiert, in horizontaler Stellung, und das gleiche gilt für den Berggipfel, über den die Straße führt.
Diese beiden Punkte sind genau jene, in denen Bereiche negativer und positiver Steigung aneinander grenzen.

Irgendwo dazwischen gibt es einen Punkt, in dem die Steigung der Straße maximal ist. (in diesem Beispiel 90%).
Dementsprechend hat die zweite Kurve dort einen „Gipfel“ – es ist aber kein Gipfel in der Landschaft, sondern wenn man so will, ein „Steigungs-Gipfel“.

Nun sehen Sie dieselben Kurven wie oben, nur mit den in der Mathematik üblichen Bezeichnungen:



Die erste Kurve ist der Graph der Funktion f(x), die zweite Kurve ist der Graph der Ableitungsfunktion f'(x).
Sehen Sie sich auch diese beiden Diagramme genau an und versuchen Sie, nachzuvollziehen, wie ihre Details miteinander zusammenhängen.

Zwei besondere Punkte des Graphen von f(x) fallen ins Auge:
An einem ist f(x) ***minimal*** (ein ***Tiefpunkt***), am anderen ist f(x) ***maximal*** (ein ***Hochpunkt***).
An den entsprechenden Punkten besitzt f(x) Nullstellen.

Jener Punkt, in dem der Graph von f(x) am steilsten ist, heißt ***Wendepunkt***.
Da dort die Ableitung von f(x) maximal ist (in diesem Beispiel 0,9), entspricht er einem Hochpunkt von f'(x).
Mit freiem Auge ist seine Lage aus der unteren Kurve besser zu bestimmen als aus der oberen.

Aus diesem Beispiel können wir bereits erahnen:
Ist eine Funktion f(x) gegeben, so ist in deren Ableitungsfunktion wertvolle Information über f(x) enthalten.
Sie gibt uns Auskunft über Maxima und Minima (die gemeinsam als „Extrema" bezeichnet werden), sowie darüber, wo der Graph am steilsten ist.

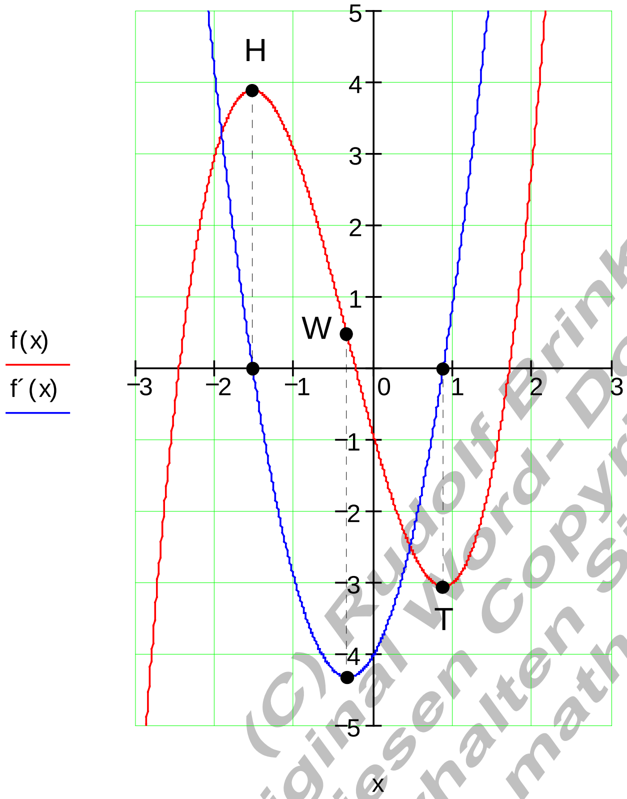
Funktion und Ableitungsfunktion in einem Koordinatensystem

Funktion: $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

Die Ableitung einer Funktion ist wieder eine Funktion.
Wir nennen sie die ***Ableitungsfunktion*** oder auch ***Steigungsfunktion***.

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



Die Graphen beider Funktionen wurden in ein Koordinatensystem gezeichnet.
Dort, wo f(x) einen Hochpunkt (H), bzw. einen Tiefpunkt (T) hat, schneidet der Graph der Ableitungsfunktion die x – Achse, hat also den Funktionswert Null. Das leuchtet ein, denn in H und T hat f(x) waagerechte Tangenten, was bedeutet, dass in diesen Punkten die Steigung von f(x) Null ist.
Die Ableitungsfunktion f'(x) hat dort ein Minimum, wo die Steigung von f(x) betrachtet zwischen H und T betragsmäßig am größten ist.