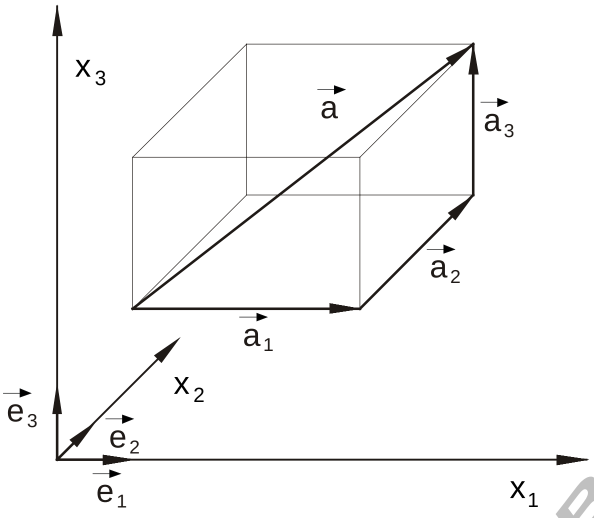
Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

Betrag eines Vektors

Es soll der Betrag eines Vektors berechnet werden, wenn dieser in Komponenten oder Koordinatenschreibweise gegeben ist.



Betrachtet man nebenstehende Darstellung, so erkennt man, dass der Vektor

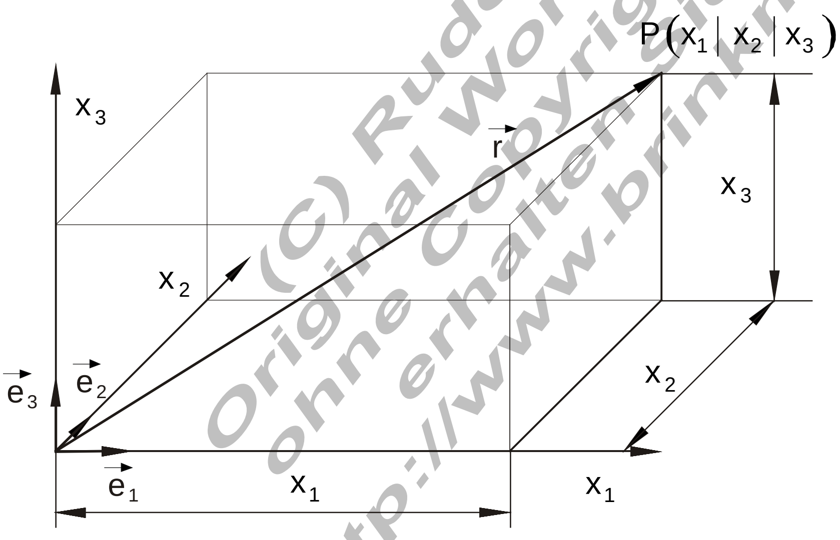
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

die gerichtete Raumdiagonale eines Quaders ist, dessen Kantenlängen a_1, a_2, und a_3 sind.

Der Betrag des Vektors stimmt daher mit der Länge der Raumdiagonalen überein. Nach Anwendung des Satzes vom Pythagoras erhält man für den Betrag des Vektors:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Betrag: $\left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



Liegt der Vektor als Ortsvektor vor, dann gilt:

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\left|\vec{r}\right| = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Beispiel:

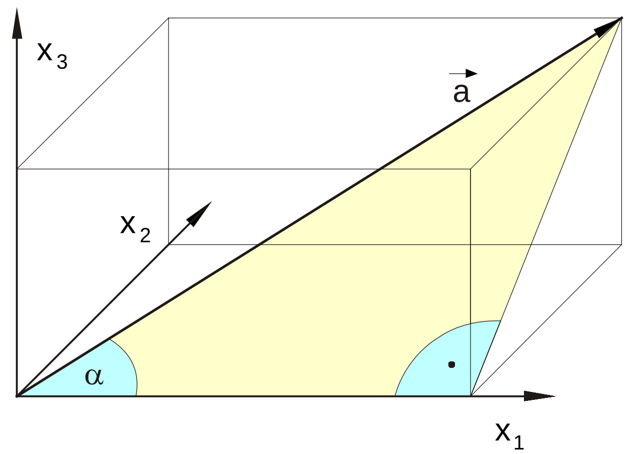
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{r}\right| = \sqrt{2^2 + 3^3 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1}$$

$$= \sqrt{14} \approx 3{,}742$$

Der Richtungskosinus eines Vektors

Zur Bestimmung der Richtung, in die ein in Komponenten bzw. Koordinatenform gegebener Vektor im Raum zeigt, verwendet man die Winkel, die dieser Vektor mit den Einheitsvektoren bildet.



Der Winkel, den die Raumdiagonale bzw. der Diagonalvektor mit der x_1 - Achse und damit auch mit deren Einheitsvektor bildet, liegt in einem Dreieck, das durch die Raumdiagonale, die Flächendiagonale der rechten Seitenfläche des Quaders sowie die x_1 - Komponente des Diagonalvektors gebildet wird. Dieses Rechteck ist rechtwinklig, so dass gilt.

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{x_1}{\left|\vec{a}\right|}$$

Analoge Beziehungen erhält man auch für die anderen beiden Winkel, so dass man schreiben kann:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{x_1}{\left|\vec{a}\right|}, \qquad \cos(\beta) = \frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{x_2}{\left|\vec{a}\right|}, \qquad \cos(\gamma) = \frac{a_3}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{x_3}{\left|\vec{a}\right|}}$$

Die Funktionswerte der Kosinus der drei Winkel werden Richtungskosinus des Vektors genannt.

Für die Summe der drei Richtungskosinus gilt:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Das bedeutet: Die Quadratsumme der Richtungskosinus ist immer 1.

Dieser Zusammenhang lässt sich leicht durch eine einfache Rechnung zeigen:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{a_1^2}{\left|\vec{a}\right|^2} + \frac{a_2^2}{\left|\vec{a}\right|^2} + \frac{a_3^2}{\left|\vec{a}\right|^2}$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\left|\vec{a}\right|^2}$$

Mit $\left|\vec{a}\right|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ wird daraus

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

Aus $\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|}$, $\quad \cos(\beta) = \frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|}$, $\quad \cos(\gamma) = \frac{a_3}{\left|\vec{a}\right|}$

folgt für die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$:

$$a_1 = \left|\vec{a}\right| \cos(\alpha), \qquad a_2 = \left|\vec{a}\right| \cos(\beta), \qquad a_3 = \left|\vec{a}\right| \cos(\gamma)$$

Damit ist es nun möglich einen Vektor mit Hilfe seiner Bestimmungsgrößen Betrag und Richtung zu schreiben:

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \left|\vec{a}\right|\cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \left|\vec{a}\right|\cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \left|\vec{a}\right|\cos(\gamma)\overrightarrow{e_3}$$

$\left|\vec{a}\right|$ wird ausgeklammert und beide Seiten werden durch $\left|\vec{a}\right|$ dividiert.

$$\Rightarrow \vec{a} = \left|\vec{a}\right|\left(\cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3}\right) \mid : \left|\vec{a}\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \overrightarrow{a_e} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \cos(\beta)\\ \cos(\gamma)\end{pmatrix}$$

Merke:	Die Koordinaten eines Einheitsvektors sind seine Richtungskosinus. $\overrightarrow{a_e} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \cos(\beta)\\ \cos(\gamma)\end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{a_e}\right| = 1$

<u>Berechnungsbeispiele.</u>

Beispiel 1:
Für folgende Vektoren sollen die Beträge und die Richtungskosinus berechnet werden:

a) $\vec{a} = 4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}4\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 1\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}2\\ -3\\ -1\end{pmatrix}$

Die Ergebnisse sind mit einer Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma anzugeben.

Lösung: a)

Betrag:

$$\left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \underline{\underline{\sqrt{29} \approx 5,385}}$$

Der Vektor hat eine Länge von etwa 5,385 LE.

Richtungskosinus:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_1}{a} = \frac{4}{\sqrt{29}} \approx 0,743 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 42,031^0}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_2}{a} = \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0,557 \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 56,145^0}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a_3}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_3}{a} = \frac{2}{\sqrt{29}} \approx 0,317 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 68,199^0}}$$

Lösung: b)

Betrag:

$$\left|\vec{b}\right| = b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{4+9+1}$$
$$= \underline{\underline{\sqrt{14} \approx 3{,}742}}$$

Der Vektor hat eine Länge von etwa 3,742 LE.

Richtungskosinus:

$$\cos(\alpha) = \frac{b_1}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{b_1}{b} = \frac{2}{\sqrt{14}} \approx 0{,}535 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 57{,}688^0}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{b_2}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{b_2}{b} = \frac{-3}{\sqrt{14}} \approx -0{,}802 \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 143{,}301^0}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{b_3}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{b_3}{b} = \frac{-1}{\sqrt{14}} \approx -0{,}267 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 105{,}501^0}}$$

Bemerkung: Ist der Kosinus eines Winkels negativ, dann liegt der Wert des Winkels zwischen 90^0 und 180^0.

Beispiel 2:

Gesucht ist der Ortsvektor von der Länge 2, der mit der x_1 - Achse einen Winkel von 60^0 , mit der x_2 - Achse einen Winkel von 135^0 und mit der x_3 - Achse einen spitzen Winkel einschließt.

Lösung:

Ortsvektor $\vec{r}$ mit der Länge 2 bedeutet $\left|\vec{r}\right| = 2$

$$\alpha = 60^0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \cos\left(60^0\right) = \frac{1}{2}\ , \quad \beta = 135^0 \Rightarrow \cos(\beta) = \cos\left(135^0\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \Leftrightarrow \cos(\gamma) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\gamma) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

da γ spitz sein soll, gilt: $\cos(\gamma) = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60^0$

Der Einheitsvektor ist: $\overrightarrow{e_r} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3}$

$$= \cos\left(60^0\right)\overrightarrow{e_1} + \cos\left(135^0\right)\overrightarrow{e_2} + \cos\left(60^0\right)\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_3}$$

und der Vektor selbst: $\vec{r} = \left|\vec{r}\right|\overrightarrow{e_r} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_3}\right)$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\vec{r} = \overrightarrow{e_1} - \sqrt{2}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}}}$$

Zusammenfassung

Betrag eines Vektors, Betrag eines Ortsvektors	$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\vec{a}\right\| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $\vec{r} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\vec{r}\right\| = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Richtungskosinus eines Vektors	$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{x_1}{\left\|\vec{a}\right\|}, \quad \cos(\beta) = \frac{a_2}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{x_2}{\left\|\vec{a}\right\|}, \quad \cos(\gamma) = \frac{a_3}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{x_3}{\left\|\vec{a}\right\|}$ Es gilt: $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$

Koordinaten des Einheitsvektors	Die Koordinaten eines Einheitsvektors sind seine Richtungskosinus. $\overrightarrow{a_e} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$ mit $\left\|\overrightarrow{a_e}\right\| = 1$