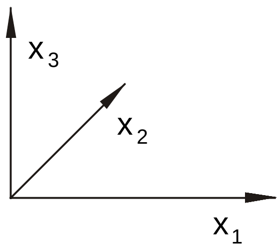
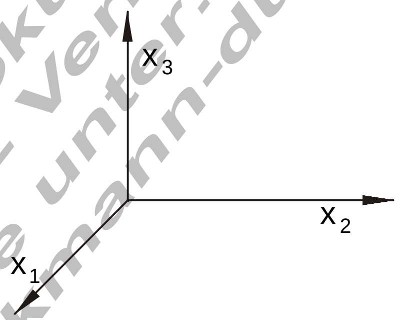
Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

Die Komponentendarstellung von Vektoren

Bei bisherigen Rechnungen spielte lediglich die Anordnung der beteiligten Vektoren zueinander eine Rolle. Die räumliche Lage der Vektoren war dabei unwesentlich. Das lässt die Schlussfolgerung zu, dass die Vektorrechnung unabhängig von einem Koordinatensystem ist. Für bestimmte Probleme erweist es sich dennoch als sehr nützlich, wenn man für die Darstellung der Vektoren ein Koordinatensystem zugrunde legt.
Für weitere Betrachtungen wird das räumliche kartesische Koordinatensystem zugrunde gelegt. Dabei handelt es sich um drei senkrecht aufeinanderstehende Koordinatenachsen, die der Reihe nach mit x_1, x_2 und x_3 bezeichnet werden.
Bemerkung: Statt x_1, x_2 und x_3 könnte man diese auch x, y und z- Achse nennen, doch für die Darstellung n- dimensionaler Vektoren wäre das wenig geeignet.

Nachfolgend zwei Darstellungen für das räumliche kartesische Koordinatensystem, wie es in der Praxis oft verwendet wird.





Die x_1 und x_3 - Achse liegen in der Zeichenebene. Die positive x_2 - Achse zeigt nach hinten.

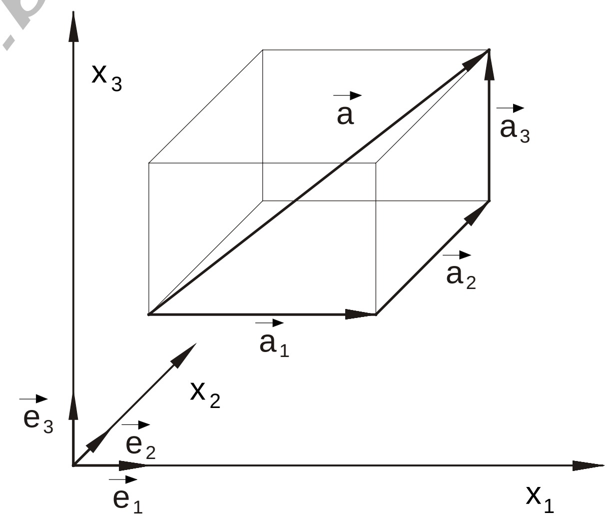
Die x_2 und x_3 - Achse liegen in der Zeichenebene. Die positive x_1 - Achse zeigt nach vorne.

Der Vektor $\vec{a}$ wird in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dargestellt.
Er lässt sich in drei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen.

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$$

Jede der drei Komponenten lässt sich auch als Vielfaches des jeweiligen Einheitsvektors darstellen:

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

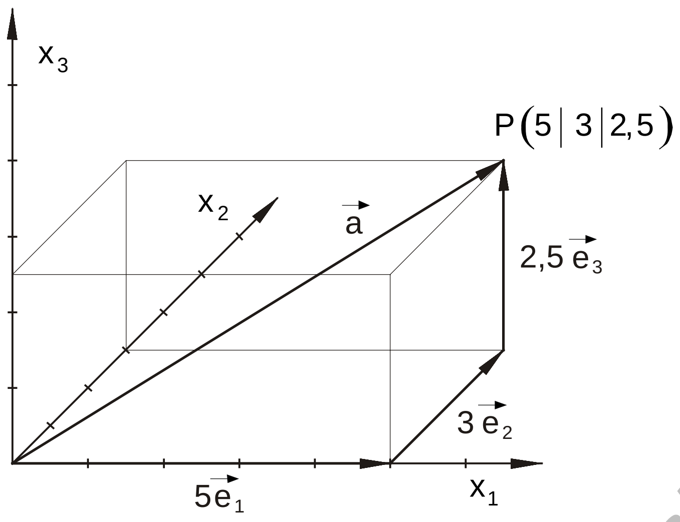


Die drei Skalare a_1 , a_2 und a_3 , die die Länge des Vektors in Richtung der Koordinatenachsen angeben, werden als Koordinaten des Vektors bezeichnet.

Beispiel: 1

Der Vektor $\vec{a} = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 2{,}5\vec{e_3}$

soll in ein räumliches kartesisches Koordinatensystem eingezeichnet werden.



Um den Vektor darzustellen, wird dessen Anfangspunkt in den Koordinatenursprung gelegt.

Der Vektor wird dann aus seinen Komponenten nach den Regeln der Vektoraddition zusammengesetzt.

In diesem Beispiel endet der eingezeichnete Vektor in dem Punkt P, der die Koordinaten P(5| 3 |2 ,5) hat.

Das Beispiel zeigt: Jeder Vektor, der im dreidimensionalen Raum vom Koordinatenursprung ausgeht, endet dort in einem Punkt.
So wie jeder Punkt im dreidimensionalen Raum eindeutig durch seine Koordinaten festgelegt ist, kann dieses auch durch Vektoren geschehen, die vom Koordinatenursprung zu diesem Punkt führen.
Solche Vektoren Nennt man Ortsvektoren.

Der Vektor $\vec{r} = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 2{,}5\vec{e_3}$ endet im Punkt $P(5|3|2{,}5)$.

Allgemein gilt: $\vec{r} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ endet im Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$.

Da Größe und Richtung eines Vektors im dreidimensionalen Raum eindeutig durch die Angabe der drei Koordinaten festgelegt ist, kann man beim Aufschreiben eines Vektors auf die Angabe der Einheitsvektoren verzichten.
Ein Vektor lässt sich unter dieser Vorraussetzung auch als Spaltenmatrix schreiben.

$$\underbrace{\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}}_{\text{Komponentendarstellung}} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinatendarstellung}}$$

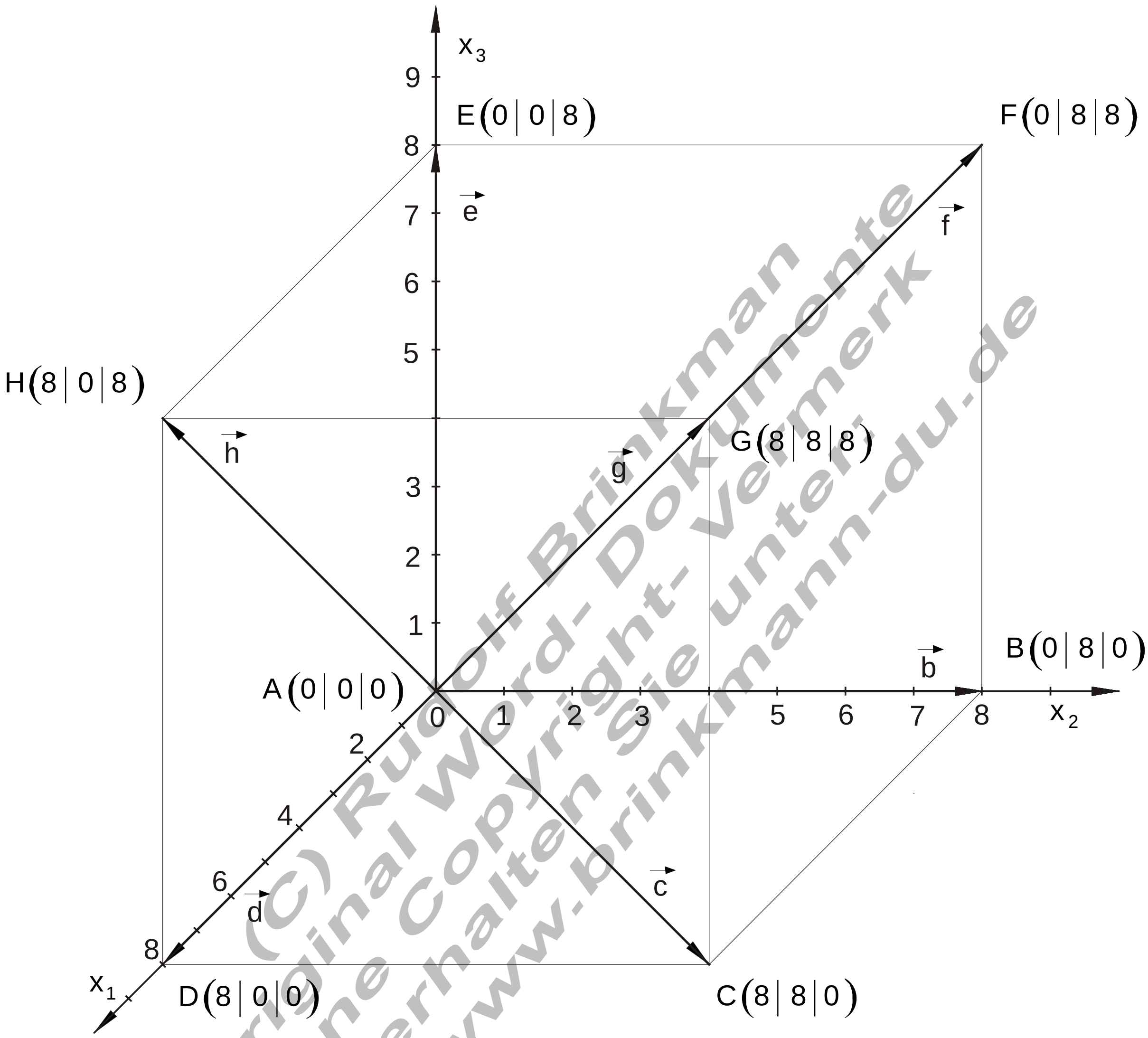
Die Komponentendarstellung und die Koordinatendarstellung sind zwei unterschiedliche aber gleichwertige Schreibweisen für Vektoren.
Ein Ortsvektor, der zum Punkt P führt, wird wie folgt dargestellt:

Speziell: $\vec{a} = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 2{,}5\vec{e_3} \Leftrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist $P(x_1|x_2|x_3)$ zugeordnet.

Es ist darauf zu achten, dass Ortsvektoren, die als gebundene Vektoren vom Koordinatenursprung zu einem Punkt führen, nicht mit freien Vektoren, die im Raum beliebig parallel zu sich verschoben werden dürfen, verwechselt werden.

Beispiel: 2

Ein Würfel mit der Kantenlänge 8 LE ist so in ein räumliches kartesisches Koordinatensystem einzuzeichnen, dass eine Ecke im Koordinatenursprung liegt. Zu allen Eckpunkten des Würfels sollen Ortsvektoren gezeichnet werden. Die Ortsvektoren sind in Koordinatendarstellung anzugeben.



Für die Ortsvektoren gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die obige Darstellung ist eine von vielen Möglichkeiten. Der Würfel liegt im 1. Oktanten. Eine andere Darstellung könnte in einem Koordinatensystem erfolgen, in dem die x_1 - Achse nach hinten zeigt. Je nach Bezeichnung der Eckpunkte des Würfels und dessen Ausrichtung würden die Vektoren andere Bezeichnungen bekommen und auch andere Koordinaten haben können.