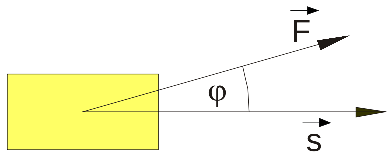
Das skalare Produkt

Die Definition der Arbeit im physikalischen Sinne ist eine Verknüpfung zwischen zwei Vektoren, deren Ergebnis eine reelle Zahl ist.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos(\varphi)$$



Definition:	Das skalare Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird berechnet, indem man das Produkt der Beträge dieser Vektoren mit dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels multipliziert: $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Merke:	Ein skalares Produkt zweier Vektoren wird gleich Null, wenn mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist oder wenn beide Vektoren senkrecht aufeinander stehen. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a} \perp \vec{b}$. Denn aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ folgt $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$ d.h. $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90^0$ oder $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 270^0$

Für die skalare Multiplikation zweier gleicher Vektoren folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\left(0^0\right) = a \cdot a \cdot 1 = a^2 \quad \left(\text{Bemerkung: } \left|\vec{a}\right| = a\right)$$

Mit Hilfe des skalaren Produktes kann der Betrag eines Vektors dargestellt werden.

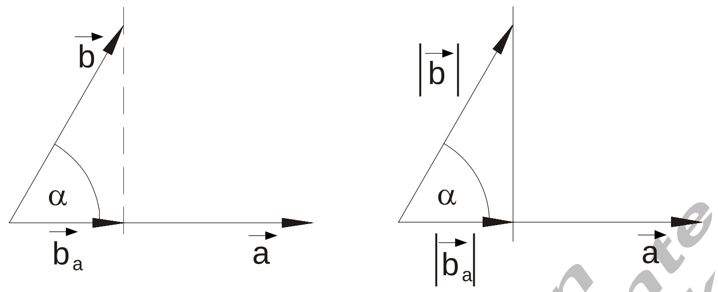
Betrag eines Vektors: $a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

<u>Rechengesetze für skalare Produkte.</u>

Für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt:	
Kommutativgesetz	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Assoziativgesetz	$\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$
Distributivgesetz	$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Beispiel:

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die unterschiedliche Richtungen haben.
Gesucht ist die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$,
bzw. die Komponente des Vektors $\vec{b}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}$
also der Vektor $\overrightarrow{b_a}$



$$\alpha := \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Es gilt $\overrightarrow{b_a} = \left|\overrightarrow{b_a}\right| \cdot \overrightarrow{e_a}$, wobei $\overrightarrow{e_a}$ der Einheitsvektor von $\vec{a}$ ist. Es ist $\overrightarrow{e_a} = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{b_a} = \left|\overrightarrow{b_a}\right| \cdot \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} \qquad (1)$$

Für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\alpha) \qquad (2)$

Weiterhin gilt für den Kosinus: $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\overrightarrow{b_a}\right|}{\left|\vec{b}\right|} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{b_a}\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\alpha)$

eingesetzt in (2): $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b_a}\right| \qquad (3)$

Der Vektor $\overrightarrow{b_a}$ ist die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.

Da beide die gleiche Richtung haben, gilt für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\overrightarrow{b_a}$:

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b_a}\right| \cdot \cos\left(0^0\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b_a}\right| \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt somit: $\begin{matrix} \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b_a}\right| = \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b_a}\right| = \vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a} \end{matrix} \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a}$

Bei Vertauschung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt ebenfalls $\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{a_b}\cdot\vec{b}$

Aus (3) folgt weiterhin: $\left|\overrightarrow{b_a}\right| = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}$ eingesetzt in (1) ergibt das:

$$\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$$

Bei Vertauschung der Vektoren gilt: $\overrightarrow{b_a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$ bzw. $\overrightarrow{a_b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2} \cdot \vec{b}$

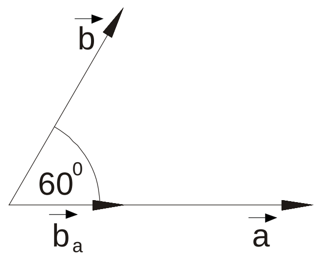
Zusammenfassend lässt sich sagen:
Der Wert des skalaren Produktes zweier Vektoren ändert sich nicht, wenn man einen der Vektoren durch seine Komponente längs des anderen ersetzt.

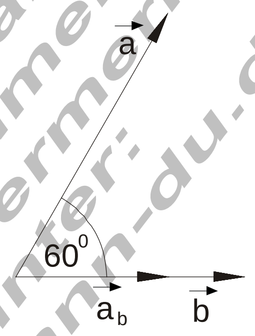
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a} = \overrightarrow{a_b}\cdot\vec{b}$$

Da die Division zweier Vektoren nicht definiert ist, kann folgende Beziehung manchmal hilfreich sein:

$$\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a} \text{ bzw. } \overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\cdot\vec{b}$$

Beispiel:
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit den Beträgen $a = 4\,LE$ und $b = 3\,LE$ bilden einen Winkel von 60^0 miteinander.
Berechnen Sie $\overrightarrow{b_a}$ und $\overrightarrow{a_b}$. Überprüfen Sie das Ergebnis zeichnerisch.





$$\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(60^0\right) = 4\cdot 3\cdot 0{,}5 = 6$$

$$a^2 = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right| = 4\cdot 4 = 16$$

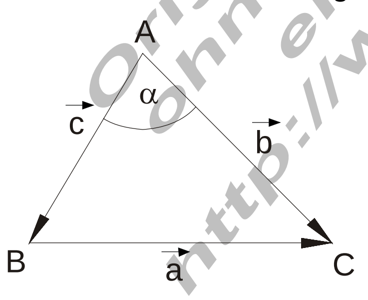
$$\Rightarrow \overrightarrow{b_a} = \frac{6}{16}\cdot\vec{a} = \frac{3}{8}\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\cdot\vec{b}$$

$$b^2 = \left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| = 3\cdot 3 = 9$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_b} = \frac{6}{9}\cdot\vec{b} = \frac{2}{3}\cdot\vec{b}$$

Beispiel:
Der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie soll hergeleitet werden.



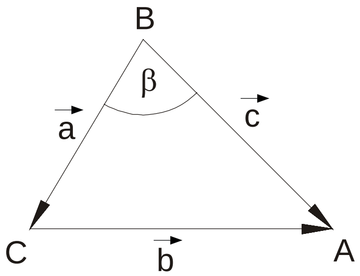
$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \mid +\vec{b} - \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \text{ quadrieren}$$

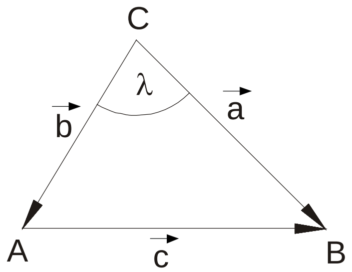
$$\Rightarrow a^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = \left(\vec{b} - \vec{c}\right)^2 = b^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + c^2$$

$$= b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(\alpha)$$



$$\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}=\vec{0}\;|+\vec{c}-\vec{a}$$
$$\Leftrightarrow \vec{b}=\vec{c}-\vec{a} \text{ quadrieren}$$
$$\Rightarrow b^2=\vec{b}\cdot\vec{b}=\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2=c^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+a^2$$
$$=a^2+c^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$=a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta)$$

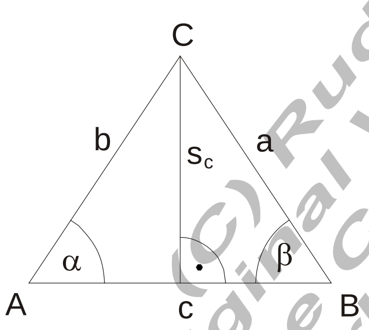


$$\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}\;|+\vec{a}-\vec{b}$$
$$\Leftrightarrow \vec{c}=\vec{a}-\vec{b} \text{ quadrieren}$$
$$\Rightarrow c^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=a^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$$
$$=a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\gamma)$$

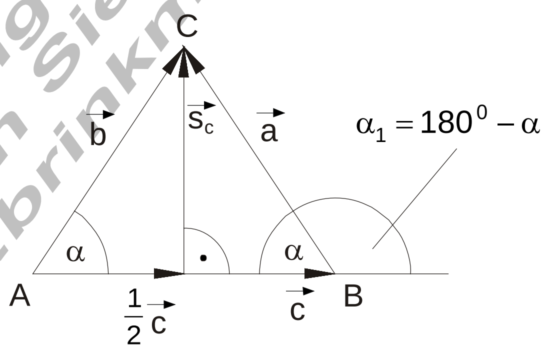
Besonderheit für ein rechtwinkliges Dreieck:
Da das Skalarprodukt zweier rechtwinklig aufeinanderstehender Vektoren Null ist, erhält man für obiges Beispiel den Satz des Pythagoras.

$$c^2=a^2+b^2$$

Beispiel:
Beweisen Sie, das die Seitenhalbierende der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks senkrecht auf dieser steht.



$a=b$ und $\alpha=\beta$



$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\triangleq a=b \text{ und } \cos\left(180^0-\alpha\right)=-\cos(\alpha)$$

Vektorgleichungen: $\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ (1)

$$\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}-\overrightarrow{s_c}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{s_c}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a} \qquad (2)$$

Mit (1) wird $\overrightarrow{s_c}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

Um zu zeigen das $\overrightarrow{s_c}\perp\vec{c}$ ist, muss gelten: $\overrightarrow{s_c}\cdot\vec{c}=0$

$$\overrightarrow{s_c}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}ac\cdot\cos\left(180^0-\alpha\right)+\frac{1}{2}bc\cdot\cos(\alpha)$$

Mit $b=a$ und $\cos\left(180^0-\alpha\right)=-\cos(\alpha)$ ist

$$\overrightarrow{s_c}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}ac\cdot\cos(\alpha)+\frac{1}{2}ac\cdot\cos(\alpha)=0\Rightarrow\overrightarrow{s_c}\perp\vec{c} \qquad \text{q.e.d}$$

Euklidischer Vektorraum

Gelten zusätzlich zur algebraischen Struktur eines reellen Vektorraums, wie nachfolgend aufgelistet,

Für jede Zahl $\{k;\ k_1;k_2\} \in \mathbb{R}$ und $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\} \in V$ als Vektoren gilt:

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$	Assoziativgesetz der Addition
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	Nullelement bezüglich der Addition in V
$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$	Inverses Element bezüglich der Addition
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	Kommutativgesetz der Addition
$k_1\left(k_2\,\vec{a}\right)=k_1\cdot k_2\,\vec{a}$	Assoziativgesetz der Multiplikation
$\left(k_1+k_2\right)\vec{a}=k_1\,\vec{a}+k_2\,\vec{a}$	Distributivgesetz bei der Addition von Skalaren
$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$	Distributivgesetz bei der Addition von Vektoren
$1\vec{a}=\vec{a}$	Unitäres Gesetz

folgende Gesetze,

Für jede Zahl $\{k;a\} \in \mathbb{R}$ und $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\} \in V$ als Vektoren gilt:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	Kommutativgesetz der Skalarmultiplikation
$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	Distributivgesetz der Skalarmultiplikation
$\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$	Gemischtes Assoziativgesetz
$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\lvert a\rvert^2=a^2$	Betrag des Vektors $\vec{a}$

dann spricht man von einem euklidischen Vektorraum.

Bemerkungen:

Zu einem Vektor gibt es bezüglich der Skalarmultiplikation kein inverses Element. Das bedeutet, man kann durch einen Vektor nicht dividieren.

Bezüglich der Skalarmultiplikation von Vektoren gibt es kein neutrales Element, denn das Ergebnis ist eine reelle Zahl und kein Vektor.