Der natürliche Logarithmus und Exponentialgleichungen zur Basis e

Im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen oder solchen, die diese als Teilfunktion enthalten, kommt es immer wieder zu dem Problem eine Exponentialgleichung lösen zu müssen.
Im folgenden eine kurze Abhandlung zu diesem Thema.

Zuvor die wichtigsten Potenz – und Logarithmengesetze.

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Logarithmengesetze zur Basis e

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln\left(b^c\right) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

Training POT_LOG_01:

<u>Anwendung der Potenz- und Logarithmengesetze.</u>
Formen Sie folgende Potenz- und Logarithmenterme unter Verwendung der Potenz- und Logarithmengesetze um.

1.	$\left(e^x + e^{-x}\right)^2$	2.	$\left(e^x - e^{-x} + 5\right) \cdot e^x$
3.	$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$	4.	$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$
5.	$\frac{1}{e^{2x}} + 3\left(e^{-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$	6.	$e^{\ln(2t)} - 2t \cdot e^{\ln(2)}$
7.	$\ln\left(e^2\right) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$	8.	$\ln\left(2e^2\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right)$
9.	$e^{\ln(t)+1}$	10.	$\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}t\right)}$

Exponentialgleichungen

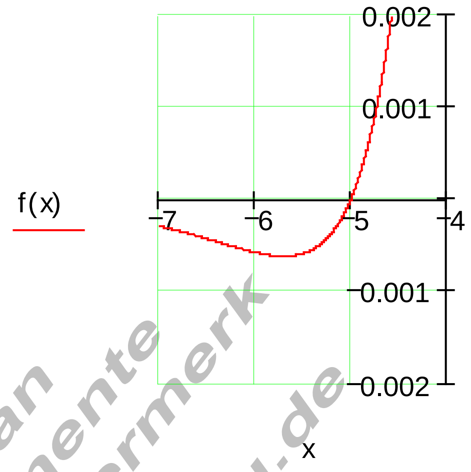
Um z.B. die Nullstellen der Funktion
$f(x) = e^{2x+4} - e^{x-1}$ zu bestimmen,
ist folgender Ansatz nötig:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x+4} - e^{x-1} = 0$

$e^{2x+4} - e^{x-1} = 0$ ist eine Exponentialgleichung,
die nach folgender Umformung
$e^{2x+4} = e^{x-1}$ über den Exponentialvergleich
gelöst werden kann.

$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x + 4 = x - 1$
$2x + 4 = x - 1 \Rightarrow x = -5$

Nullstelle von $f(x)$ bei $x = -5$

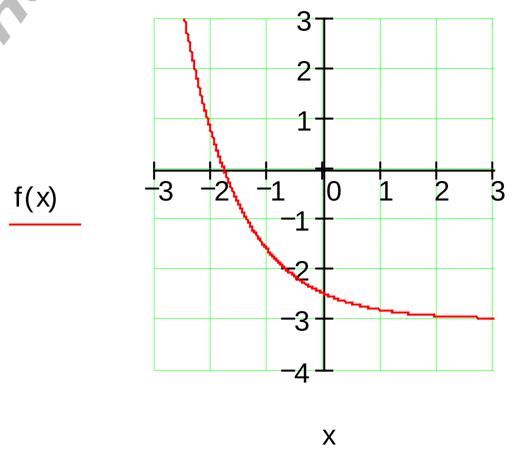
$f(x) := e^{2\cdot x+4} - e^{x-1}$



Eine Lösung mittels Exponentenvergleich ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben. Das ist leider jedoch nicht immer möglich, wie folgendes Beispiel zeigen soll.

Die Nullstelle der Funktion
$f(x) = \frac{1}{2e^x} - 3$
soll bestimmt werden
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \mid +3$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \mid \cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$
Hier ist kein Exponentialvergleich möglich
Ansatz über logarithmieren:
$\ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$
$\Leftrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(6) \Leftrightarrow x = -\ln(6)$
Nullstelle von $f(x)$ bei $x = -\ln(6)$

$f(x) := \frac{1}{2\cdot e^x} - 3$



In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.
Jedoch Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

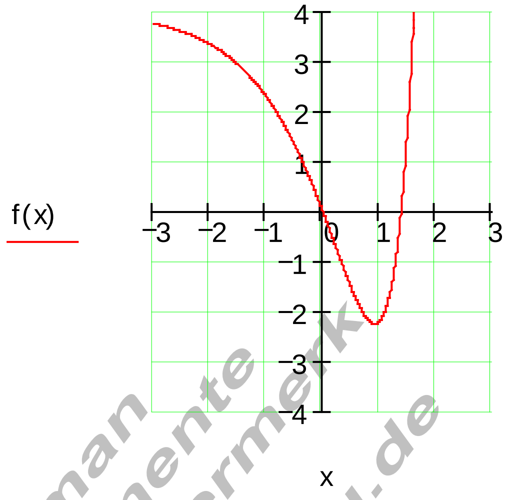
Die Nullstellen der Funktion
$f(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 4$
sollen bestimmt werden
$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

Substitution : $e^{x} = u\,;\, e^{2x} = u^{2}$

$\Rightarrow u^{2} - 5u + 4 = 0 \Rightarrow u_1 = 1; u_2 = 4$
$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = \ln(1) = 0$
$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow x_2 = \ln(4)$

Nullstellen von $f(x)$ bei
$x_1 = 0$ und $x_2 = \ln(4)$

$f(x) := e^{2\cdot x} - 5\cdot e^{x} + 4$



Beispiele

$2e^{3x} - 6e^{x} = 0 \;|\; + 6e^{x}$

$\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^{x} \;|\; :2$

Lösung durch logarithmieren

$\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^{x} \;|\; \ln(\;)$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(3\cdot e^{x}\right)$

$\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + \ln\left(e^{x}\right)$

$\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + x\cdot\ln(e)$

$\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \;|\; -x$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \;|\; :2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}\ln(3)}}$

Probe:

$2e^{3\cdot\frac{1}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$

$\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0\;(w)$

$x\cdot e^{x} - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(e^{x} - 3\right) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ und

$e^{x} - 3 = 0 \;|\; +3$

Lösung durch logarithmieren

$\Leftrightarrow e^{x} = 3 \;|\; \ln(\;)$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow x\cdot\ln(e) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$

Probe:

$x_1 = 0$

$0\cdot e^{0} - 3\cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow 0\cdot 1 = 3\cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0\;(w)$

$x_2 = \ln(3)$

$\ln(3)\cdot e^{\ln(3)} - 3\cdot\ln(3) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(3)\cdot 3 - 3\cdot\ln(3) = 0$

$\Leftrightarrow 3\cdot\ln(3) - 3\cdot\ln(3) = 0\;(w)$

$e^{2x}-\frac{17}{2}e^x+4=0$ Substitution: $u=e^x \Rightarrow u^2-\frac{17}{2}u+4=0$

Rücksubstitution

$u_1=8 \Leftrightarrow e^x=8 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln(8)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=\ln(8)}}$

$u_2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2} \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x\cdot\ln(e)=\ln(1)-\ln(2)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=-\ln(2)}}$

Lösung der quadratischen Gleichung

$p=-\frac{17}{2};\ q=4;$

$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{289}{16}-\frac{64}{16}=\frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D}=\frac{15}{4}$

$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$

$u_1=\frac{17}{4}+\frac{15}{4}=\frac{32}{4}=8$

$u_2=\frac{17}{4}-\frac{15}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{1+e^x}=-2\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \mid :2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^x}=-\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)}=-\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \mid \cdot\left(1+e^x\right)^2$

$\Leftrightarrow 1+e^x=-\left(e^x-4\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1+e^x=-e^x+4 \mid +e^x-1$

$\Leftrightarrow 2e^x=3 \mid \ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2\cdot e^x\right)=\ln(3)$

$\Leftrightarrow \ln(2)+\ln\left(e^x\right)=\ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)+x\cdot\ln(e)=\ln(3)$

$\Leftrightarrow \ln(2)+x=\ln(3) \mid -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(3)-\ln(2)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$

$$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot(x+2)} - 3e^{x+2} + 2 = 0$$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung

$p = -3\,;\, q = 2\,;$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Rücksubstitution

$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \,|\, \ln(\ )$

$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \,|\, -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2 + \ln(2)}}$

$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \,|\, \ln(\ )$

$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1)$

$\Leftrightarrow x+2 = 0 \,|\, -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$

Training Expgl1: Exponentialgleichungen

Lösen Sie die Exponentialgleichungen mit den von Ihnen bekannten Methoden

1.)	$6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0$	2.)	$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1$
3.)	$\frac{1}{2}e^{x} - e^{x+1} = 0$	4.)	$(3+2x)e^{x-1} = 0$
5.)	$-2x^2e^{-x+2} = 0$	6.)	$-\frac{1}{5}e^{x} - 1 + 10e^{-x} = 0$
7.)	$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$	8.)	$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x}$
9.)	$\frac{2x}{e^{x}+1} = 0$	10.)	$(2-e^{x})^2 = (e^{x}-3)^2$