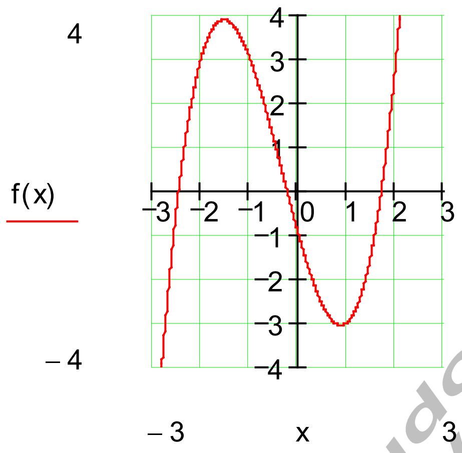
## Ganzrationale Funktion n – ten Grades

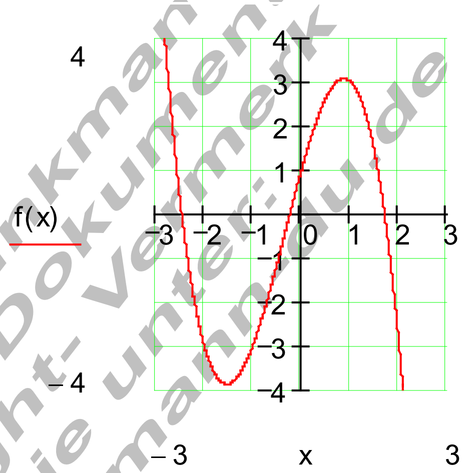
Eine Funktion $f(x)$ mit
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
heißt ganzrationale Funktion n - ten Grades.
Die Zahlen $a_n\,;\, a_{n-1}\,;\, a_{n-2}\,;\, \ldots.\, a_2\,;\, a_1\,;\, a_0$ heißen Koeffizienten

Ganzrationale Funktionen entstehen durch Zusammensetzen von Potenzfunktionen.

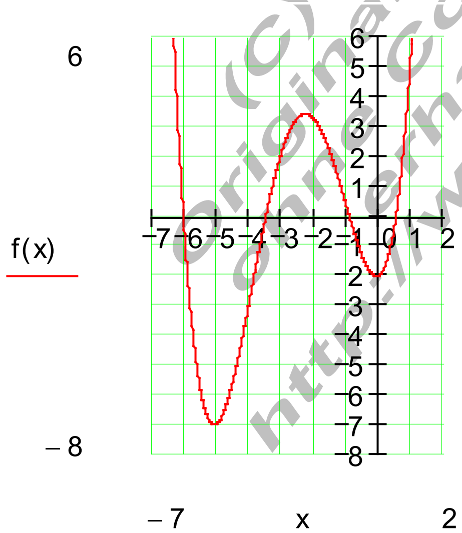
Verlauf des Graphen ganzrationaler Funktionen



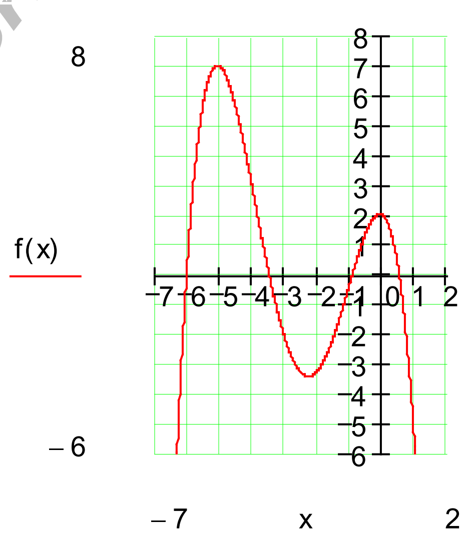

$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$




$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$




$f(x) = 0{,}2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$




$f(x) = -0{,}2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

## Verlauf des Graphen

| |
|---|
| Der Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt. |

| | n gerade | n ungerade |
|---|---|---|
| $a_n > 0$ | Verlauf von II nach I | Verlauf von III nach I |
| $a_n < 0$ | Verlauf von III nach IV | Verlauf von II nach IV |

Beispiele:

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{III} - \text{I}}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4 \text{ (gerade)} \wedge a_n = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{III} - \text{IV}}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = -5 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{II} - \text{IV}}}$

## Symmetrie

Die Vermutung liegt nahe, dass Funktionen, die nur aus Potenzfunktionen mit geraden Exponenten zusammengesetzt sind, achsensymmetrisch sind und Funktionen, die nur aus Potenzen mit ungeraden Exponenten zusammengesetzt sind, punktsymmetrisch sind.

Satz: (ohne Beweis)

| |
|---|
| Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann achsensymmetrisch, wenn deren Funktionsgleichung nur gerade Exponenten enthält.<br>Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann punktsymmetrisch, wenn deren Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten enthält. |

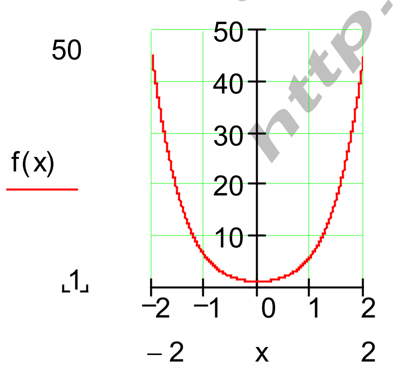
Beispiel:

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie

$f(x) = 3x^3 - 2x$

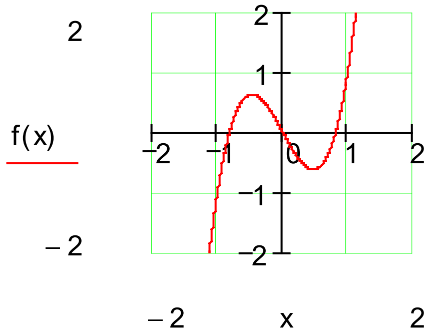
$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -\left(3x^3 - 2x\right) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie




$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

ist symmetrisch zur $y$ – Achse

(Achsensymmetrie)




$f(x) = 3x^3 - 2x$

ist symmetrisch zum Ursprung

(Punktsymmetrie)

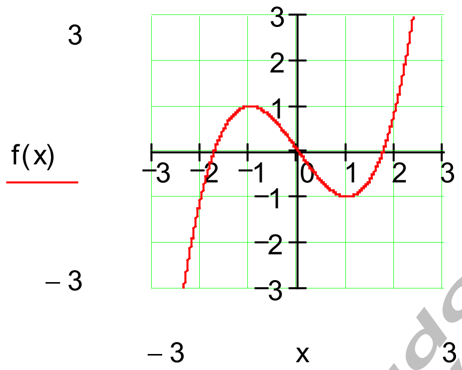
Symmetrie zu einem beliebigen Punkt.

Wird der Graph einer punktsymmetrischen Funktion beliebig verschoben, so geht die Symmetrie zum Ursprung, wir nannten sie Punktsymmetrie verloren. In Bezug auf den Zielpunkt der Verschiebung bleibt sie jedoch erhalten.

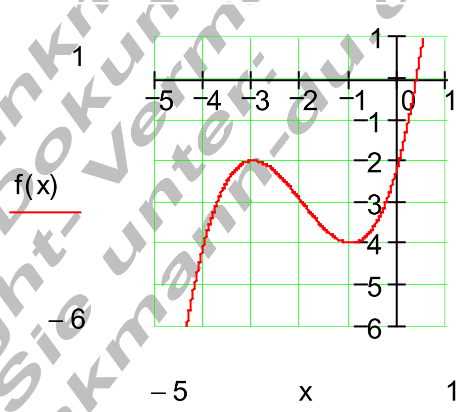
Beispiel:
Der Graph der Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x$
ist punktsymmetrisch, also symmetrisch zum Ursprung.
Der Graph soll um 2LE nach links und um 3LE nach unten verschoben werden.
Die Funktionsgleichung des verschobenen Graphen lautet:

$g(x) = 0{,}5(x+2)^3 - 1{,}5(x+2) - 3 = 0{,}5x^3 + 3x^2 + 4{,}5x - 2$

$g(x)$ ist nun symmetrisch zum Punkt $P_0(-2\,|\,-3)$




$f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x$




$f(x) = 0{,}5x^3 + 3x^2 + 4{,}5x - 2$

Das Ergebnis leuchtet sofort ein, denn eine Verschiebung des Graphen oder die Verschiebung des Koordinatensystems hat auf die Form des Graphen keinen Einfluss. Lediglich die Funktionsgleichung hat sich geändert.

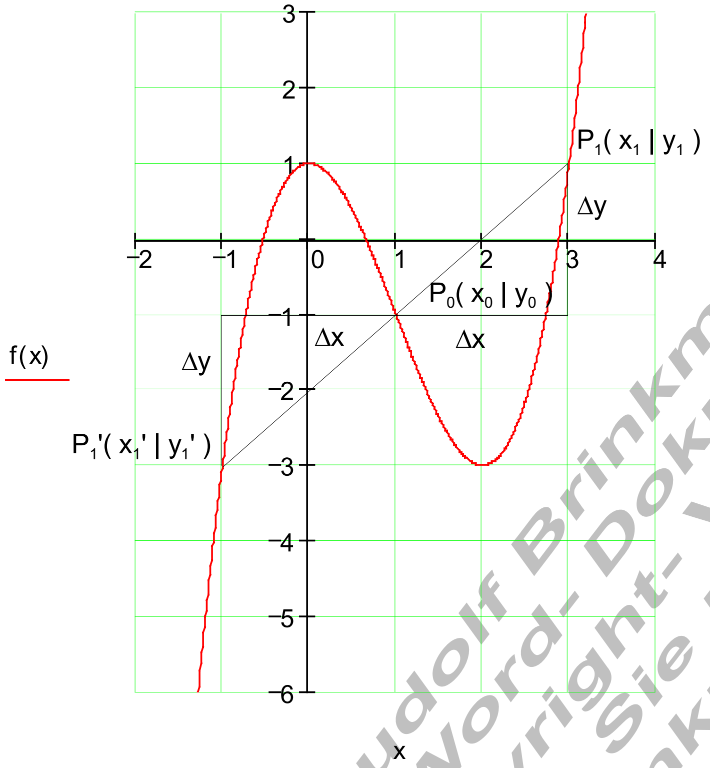


Training GRF_02:
Eigenschaften ganzrationaler Funktionen.
Machen Sie eine Aussage über die **Symmetrieeigenschaften**, den **Verlauf** und die **Anzahl der Nullstellen** folgender ganzrationaler Funktionen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.) | $f(x) = 2x^2 - 1$ | 2.) | $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ |
| 3.) | $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ | 4.) | $f(x) = -x^5 - x^3 + x$ |
| 5.) | $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ | 6.) | $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$ |
| 7.) | $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ | 8.) | $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$ |
| 9.) | $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ | 10.) | $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$ |

<u>Fallbeispiel:</u>
Es soll überprüft werden, ob der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades zu einem bestimmten Punkt punktsymmetrisch ist.

Vorbetrachtung




Für die Koordinaten der Punkte gilt:

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$y_1 = y_0 + \Delta y$

$x_1' = x_0' - \Delta x$

$y_1' = y_0' - \Delta y$

$\Delta x = x_1 - x_0$

$\Delta y = y_1 - y_0$

Die Koordinaten der gespiegelten Punkte:

$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$

$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$

Mit dieser Vorschrift lässt sich stets der bei einer Spiegelung an $P_0$ zu $P_1$ gehörige Spiegelpunkt $P_1$' bestimmen.

Beispiel:
Ist der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ punktsymmetrisch zu $P_0(1|-1)$?
Wir wählen einen beliebigen Punkt, der auf dem Graphen liegt, z.B. $P_1(3|1)$

$x_0 = 1;\ y_0 = -1;\ x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$\Rightarrow x_1' = 2x_0 - x_1 = 2 - 3 = -1$

$y_1' = 2y_0 - y_1 = -2 - 1 = -3$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_1'(-1|-3)}}$ ist der Spiegelpunkt.

$f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3 \Rightarrow P_1'(-1|-3)$ liegt auf dem Graphen von f(x).
Das bedeutet, der Graph von $f(x)$ ist punktsymmetrisch zu $P_0(1|-1)$

Falls der Spiegelpunkt nicht auf dem Graphen liegt, ist der Graph nicht punktsymmetrisch zu $P_0$.