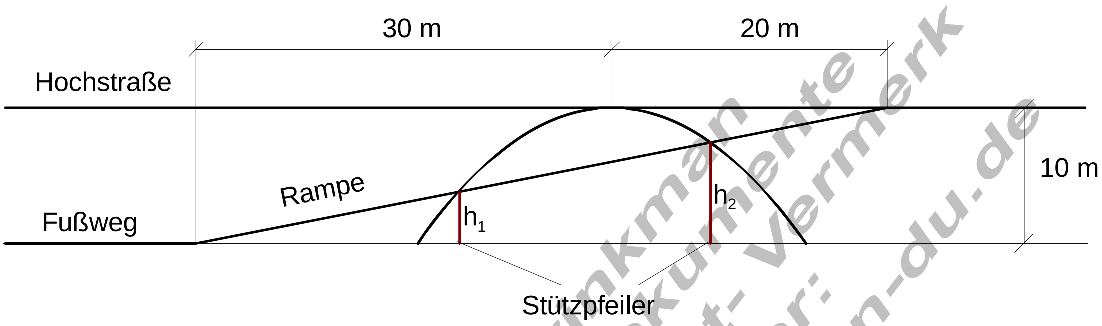
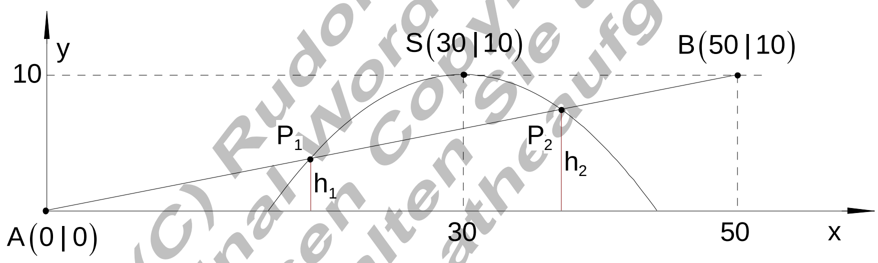
Schnittpunkte von Parabel und Gerade

Einführungsbeispiel:

Ein Fußweg verläuft unterhalb einer Hochstraße parallel zu ihr.
Am Fuß einer Brücke mit parabelförmigen Bogen soll ein Fußweg in Form einer Rampe errichtet werden, die zur Straße hinaufführt.
Ermitteln Sie die Höhe der Stützpfeiler für die Rampe.
Von der Parabel ist lediglich bekannt, dass sie den Formfaktor1/20 besitzt.



Modellierung:



Aufstellen der Funktionsgleichungen:

Rampe (Gerade) durch den Ursprung und $B(50|10)$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = \frac{1}{5}x}}$$

Brückenbogen (Parabel) mit dem Scheitel $S(30|10)$ und $a_2 = -\frac{1}{20}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{20}(x-30)^2 + 10 \text{ Scheitelpunktform}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 3x - 35}} \text{ allgemeine Form}$$

Um die Höhe der Stützpfeiler zu erhalten benötigen wir die Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel.

Berechnung der Schnittpunkte:

Ansatz: $f(x) = g(x)$ oder $f(x) - g(x) = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{20}x^2 + 3x - 35 - \frac{1}{5}x = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{14}{5}x - 35 = 0$ quadratische Gleichung

$-\frac{1}{20}x^2 + \frac{14}{5}x - 35 = 0 \mid \cdot(-20)$

$\Leftrightarrow x^2 - 56x + 700 = 0 \Rightarrow p = -56\,;\, q = 700$

$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-28)^2 - 700 = 84$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$\Rightarrow x_1 = 28 + \sqrt{84} \quad \vee \quad x_2 = 28 - \sqrt{84}$

Die Höhe der Pfeiler entspricht den zugehörigen $y-$Werten.

$y_1 = g(x_1) = g\left(28 + \sqrt{84}\right) = \frac{1}{5}\left(28 + \sqrt{84}\right) \approx \underline{\underline{7,433}}$

$y_2 = g(x_2) = g\left(28 - \sqrt{84}\right) = \frac{1}{5}\left(28 - \sqrt{84}\right) \approx \underline{\underline{3,767}}$

Der Pfeiler h_1 hat die Höhe 3,764 m, der Pfeiler h_2 hat die Höhe 7,433 m.

Soll der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Parabel bestimmt werden, so führt das immer auf eine quadratische Gleichung.

Arbeitsauftrag:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel f(x) mit einer Geraden g(x) und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem.
Benutzen Sie für die Zeichnung der Parabel die Scheitelpunktform.

$f(x) = x^2 + 4x + 1$ bzw. in der Scheitelpunktform: $f(x) = (x+2)^2 - 3$

a) $g(x) = 2x + 3$ b) $g(x) = 2x$ c) $g(x) = 2x - 2$

a)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

$\Rightarrow p = 2\,;\, q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73$

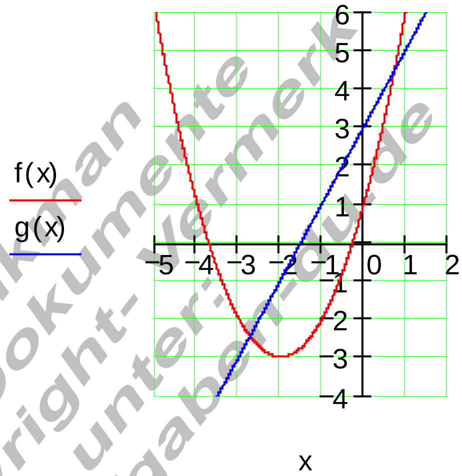
$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} = -1 - \sqrt{3} \approx -2{,}73$

$g(x_1) = 2 \cdot \left(-1 + \sqrt{3}\right) + 3 = 1 + 2\sqrt{3} \approx 4{,}46$

$g(x_2) = 2 \cdot \left(-1 - \sqrt{3}\right) + 3 = 1 - 2\sqrt{3} \approx -2{,}46$

$\Rightarrow P_1\left(-1 + \sqrt{3} \,|\, 1 + 2\sqrt{3}\right) \approx \underline{\underline{P_1(0{,}73 \,|\, 4{,}46)}}$

$P_2\left(-1 - \sqrt{3} \,|\, 1 - 2\sqrt{3}\right) \approx \underline{\underline{P_1(-2{,}73 \,|\, -2{,}46)}}$



Die Gerade g(x) schneidet den Graphen von f(x) in zwei Punkten.
Man nennt sie Sekante.

b)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

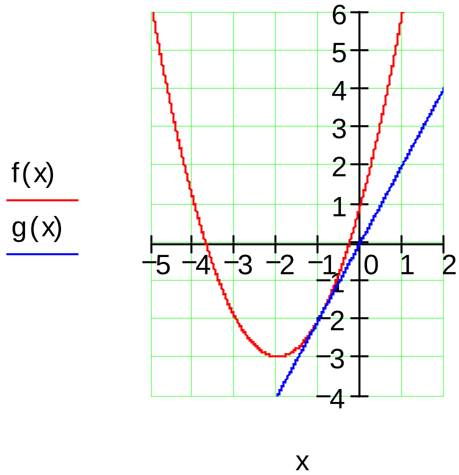
$\Rightarrow p = 2\,;\, q = 1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} = -1$

$g(x_{1/2}) = 2 \cdot (-1) + 3 = -2$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(-1 \,|\, -2)}}$ Berührungspunkt

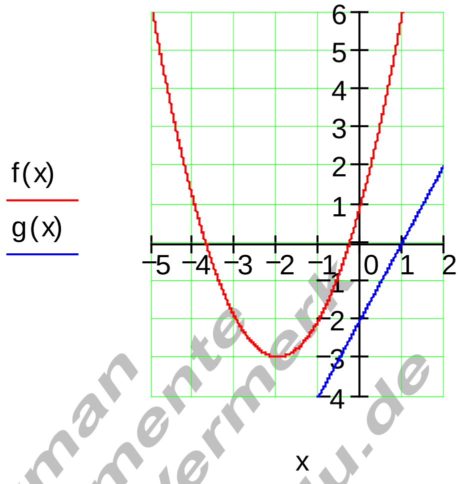
Eine Gerade, die einen Graphen in genau einem Punkt berührt, nennt man Tangente.



Die Gerade g(x) berührt den Graphen von f(x) in einem Punkt.

c)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow p = 2\,;\, q = 3$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 3 = -2 \text{ keine Lösung}$$



Die Gerade g(x) hat mit dem Graphen von f(x) keinen Punkt gemeinsam.
Eine solche Gerade nennt man Passante.

Aus dem Übungsbeispiel erkennen wir, das die Anzahl der Schnittpunkte, die eine Gerade mit einer Parabel hat direkt aus der Diskriminante ablesbar ist.

$D > 0$: $\Rightarrow$ Parabel und Gerade schneiden sich in zwei Punkten
$D = 0$: $\Rightarrow$ Parabel und Gerade berühren sich in einem Punkt
$D < 0$: $\Rightarrow$ Parabel und Gerade haben keinen gemeinsamen Punkt