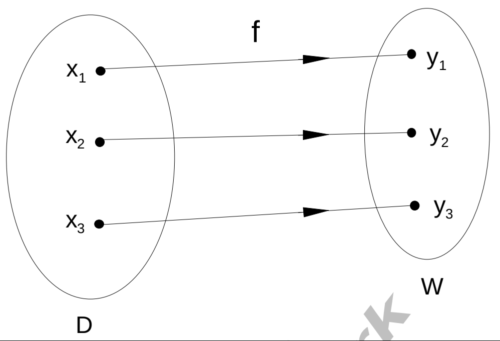
Funktion und Umkehrfunktion

Die Zuordnungsvorschrift **f** wird ausgedrückt durch die Funktionsgleichung wie z.B.

$$f = \{(x \mid y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

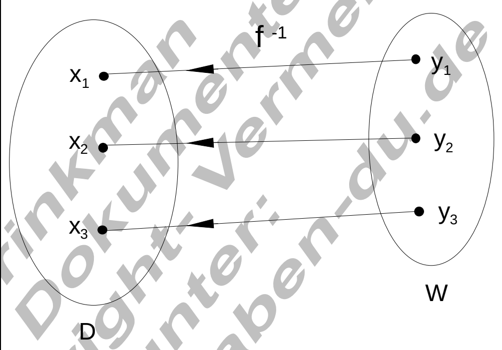
oder in Kurzform: $y = f(x) = 2x + 3$



Bei der **Eineindeutigkeit** einer Funktion existiert auch eine eindeutige Zuordnung von $\mathbf{f}^{-1}$

Diese Zuordnung wird ***Umkehrfunktion*** oder inverse Funktion genannt, z.B.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



<u>Die Umkehrfunktion der linearen Funktion.</u>

Gegeben ist die Funktion

$y = f(x) = 2x + 3$

Gesucht die **Umkehrfunktion** $\mathbf{f}^{-1}$ und ihr Graph.

Die Funktion **f** hat die Steigung m = 2. Sie schneidet mit ihrem Graph die Abszissenachse im Punkt P_x (-1,5 | 0) und die Ordinatenachse im Punkt P_y (0 | 3). Ihr Graph ist eine Gerade.

Werden nun die Variablen der Funktionsgleichung miteinander vertauscht und nach y äquivalent umgeformt, so erhält man die Umkehrfunktion.

Funktion;

$y = f(x) = 2x + 3$

$x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$

$\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$

$\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

Umkehrfunktion :

$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

Der Graph der Umkehrfunktion ist die Spiegelung des Funktionsgraphen an der 45 ^{0} – Achse.

Allgemein gilt:

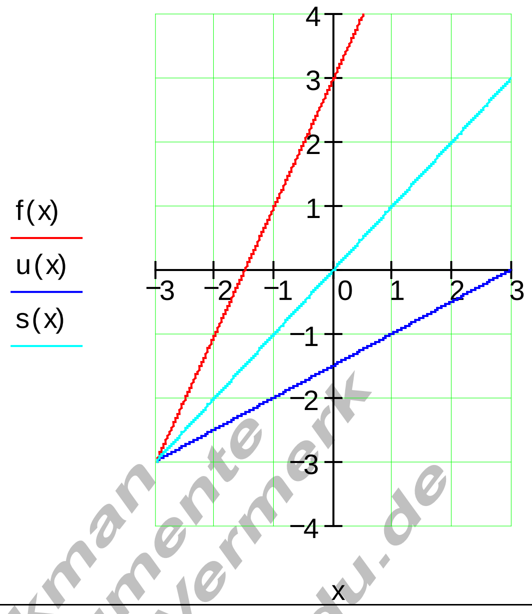
Funktion:

$y = f(x) = a_1 x + a_0$

Umkehrfunktion:

$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$

Der Einfachheit halber nennen wir die Umkehrfunktion u(x).



Die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion.

Die Vorgehensweise ist die gleiche wie oben bei der linearen Funktion gezeigt.

$y = f(x) = x^2$

vertauschen der Variablen x und y

$x = f(y) = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x$

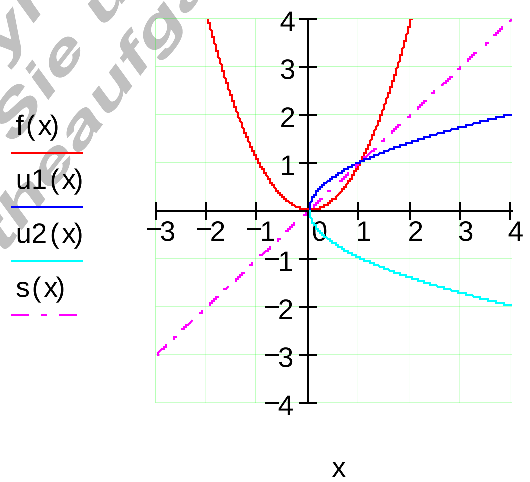
Wurzel ziehen

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ oder $y = -\sqrt{x}$

Es gibt also zwei Umkehrfunktionen:

$y = u_1(x) = \sqrt{x}$ und $y = u_2(x) = -\sqrt{x}$

Bei der Bildung der Umkehrfunktionen wurde die Definitionsmenge eingeschränkt, damit eindeutige Zuordnungen entstehen.



Die Umkehrfunktion der e- Funktion.

$y = f(x) = e^x$

vertauschen der Variablen x und y

$x = f(y) = e^y \Leftrightarrow e^y = x$

logarithmieren

$\Rightarrow \ln\left(e^y\right) = \ln(x)$

$\Leftrightarrow y = \ln(x)$

Umkehrfunktionen:

$y = u(x) = \ln(x)$

Bei der Bildung der Umkehrfunktionen wurde die Definitionsmenge eingeschränkt, denn der Logarithmus ist nur für positive x- Werte definiert.