Potenzen, Wurzeln und ihre Rechengesetze

Der Potenzbegriff

Definition:	Eine **Potenz** ist eine Multiplikation gleicher Faktoren (Basis), bei der der Exponent die Anzahl der Faktoren angibt. $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - mal}} = c$ $a \mathrel{\hat{=}}$ Basis; $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}$ $n \mathrel{\hat{=}}$ Exponent; $c \mathrel{\hat{=}}$ Potenzwert

Beispiele:

a) $a^3 = a \cdot a \cdot a$ b) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ c) $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

d) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ e) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$ f) $-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$

Rechenregeln für Potenzen (Potenzgesetze)

<u>Addition und Subtraktion von Potenzen:</u>

Regel:	Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten können addiert oder subtrahiert werden.

Beispiele:

a) $3x^4 - 5x^2 + 6x^4 + 3x^2 = 9x^4 - 2x^2$ b) $-x^2 - 2\left(x^4 + x^2\right) + 2 = -2x^4 - 3x^2 + 2$

<u>Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis</u>

Regel:	Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a \in \mathbb{R}$ $m, n \in \mathbb{N}^*$

Beispiele:

a) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$ b) $e^3 \cdot e^x = e^{3+x} = e^{x+3}$ c) $-u^2 \cdot u^3 = -u^{2+3} = -u^5$

Merke: $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{falls n gerade} \\ -a^n & \text{falls n ungerade} \end{cases}$ $(-2)^4 = 2^4 = 16$; $(-2)^3 = -2^3 = -8$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

Satz:	Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert und die Basis beibehält. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \in \mathbb{R}^* \quad m,n \in \mathbb{N}^* \wedge m > n$

Der Satz kann aber laut Definition nur gelten, wenn m > n ist.
Wir untersuchen daher die Fälle m = n und m < n

$$\text{Fall } m = n: \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 \quad \Rightarrow \quad a^0 := 1$$

Bei der Division gleicher Potenzen ergibt sich im Ergebnis der Exponent 0.
Die Division gleicher Zahlen führt zum Ergebnis 1.
Daher ist es sinnvoll, $\mathbf{a^0 = 1}$ zu definieren.

$$\text{Fall } m < n \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m-n) \in \mathbb{Z}_-^*$$

Ist der Zählerexponent kleiner als der Nennerexponent, so ergibt sich bei der Anwendung des Satzes über die Division von Potenzen eine negative Zahle als Exponent.
Um die Allgemeingültigkeit des Satzes zu erreichen, muss die Definition des Potenzbegriffes erweitert und die Potenz mit negativen Exponenten sinnvoll interpretiert werden.

Satz:	Setzt man eine Potenz vom Zähler in den Nenner oder umgekehrt, so ändert sich das Vorzeichen des Exponenten. $a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Definition:	1. erweiterte Potenzdefinition: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n\text{ - mal}} \wedge a^0 = 1 \wedge a^{-n} = \frac{1}{a^n} \wedge a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ $a \in \mathbb{R}^* \quad n \in \mathbb{Z} \quad a^n \in \mathbb{R}$

Mit Hilfe dieser Definition sind die Sätze über die Multiplikation und Division uneingeschränkt gültig.

Beispiele:

a) $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

b) $\frac{x^7}{x^7} = x^{7-7} = x^0 = 1$

c) $\frac{e^5}{e^7} = e^{5-7} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

d) $\frac{x^{n-1}}{x^n} = x^{n-1-n} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Multiplikation von Potenzen mit ungleicher Basis aber gleichem Exponenten

Regel:	Potenzen mit ungleicher Basis aber gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält. $a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad a,b \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}^*$

Beispiele:

a) $12^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(12 \cdot \frac{1}{4}\right)^3 = 3^3 = 27$

b) $(x+1)^2 (x-1)^2 = \left[(x+1)(x-1)\right]^2 = \left(x^2 - 1\right)^2$

Division von Potenzen mit ungleicher Basis aber gleichem Exponenten

Regel:	Potenzen mit ungleicher Basis aber gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad b \in \mathbb{R}^* \qquad n \in \mathbb{N}^*$

Beispiele:

a) $\frac{25^3}{5^3} = \left(\frac{25}{5}\right)^3 = 5^3 = 125$

b) $\frac{\left(u^2-1\right)^2}{(u+1)^2} = \left[\frac{\left(u^2-1\right)}{u+1}\right]^2 = \left[\frac{(u-1)(u+1)}{(u+1)}\right]^2 = (u-1)^2$

Potenzieren von Potenzen

Regel:	Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Beispiele:

a) $\left(4^3\right)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$

b) $\left(x^{n-2}\right)^3 = x^{(n-2) \cdot 3} = x^{3n-6}$

Radizieren von Potenzen

Regel:	Potenzen werden radiziert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert und die Basis beibehält. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $m \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Damit lassen sich nun alle Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten darstellen. Das vereinfacht Berechnungen mit Wurzeln, da man sich auf die bekannten Potenzgesetze stützen kann.

Beispiele

a) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ b) $\sqrt[4]{x^{6n+2}}\cdot x^{-n} = x^{\frac{6n+2}{4}}\cdot x^{-n} = x^{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{x^{n+1}}$

Zusammenfassung der Potenzgesetze

Multiplikation und Division bei gleichen Basen:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a \in \mathbb{R}$ $m,n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a \in \mathbb{R}^*$ $m,n \in \mathbb{Q}$
bei gleichen Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$a,b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Q}$
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a,b \in \mathbb{R}^*$ $n \in \mathbb{Q}$
Potenzieren von Potenzen	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$a \in \mathbb{R}$ $m,n \in \mathbb{Q}$
Radizieren von Potenzen	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a \in \mathbb{R}_+^*$ $m \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{N}^*$
Folgerungen aus den Potenzgesetzen:	$a^0 = 1$ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$a \in \mathbb{R}^*$ $n \in \mathbb{Q}$

Tips und Tricks bei Berechnungen mit Wurzeln

Faktor aus der Wurzel ziehen

a) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{28}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 7}}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$

Den Nenner wurzelfrei machen

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

b) $\frac{-2}{\sqrt{2}-2} = \frac{-2\left(\sqrt{2}+2\right)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)} = \frac{-2\left(\sqrt{2}+2\right)}{2-4} = \sqrt{2}+2$