Lineare Gleichungen zu Sachaufgaben

Was sind Sachaufgaben?

Viele Problemstellungen aus dem täglichen Leben sowie aus den unterschiedlichsten Wissenschaftsdisziplinen werden nicht in Form von mathematischen Gleichungen gegeben, sondern die Mathematisierung solcher Sachverhalte erfolgt aus der Beschreibung der Problematik. Das Problem ist zu mathematisieren.
Dazu gibt es keine feste Regeln. Die Lösung solcher Aufgaben erfordert viel Übung und etwas Geschick. Hier ist logisches Denken die Voraussetzung dafür, den richtigen Ansatz zu finden.
In der Praxis findet man allerdings häufig, dass sich Problemstellungen im mathematischen Ansatz ähneln und damit das Aufstellen der entsprechenden Gleichungen sehr erleichtern.

Folgende Schritte sind bei der Lösung von Sachaufgaben durchzuführen:
1. Den Text gründlich lesen, falls möglich eine Skizze anfertigen.
2. Für die gesuchte Größe eine Variable anlegen.
3. Eine Gleichung, die den Sachverhalt beschreibt aufstellen.
4. Die Gleichung mit entsprechenden Verfahren lösen.
5. Die Lösung durch einsetzen in die Gleichung überprüfen.
6. Einen aussagekräftigen Antwortsatz schreiben.

Auf dieser Seite werden Sachaufgaben oder auch Textaufgaben behandelt, deren Mathematisierung auf lineare Gleichungen führen.

<u>Beispiel 1:</u>
Das zehnfache einer Zahl vermindert um 10 ist gleich dem sechsfachen der Zahl vermehrt um 2. Wie heißt die Zahl?

Ansatz:
Die gesuchte Zahl sei x, das zehnfache davon ist 10x.
Vermindert um 10 bedeutet 10 abziehen. Vermehrt um zwei bedeutet zwei dazuzählen.
Mit diesem Ansatz lässt sich die Gleichung aufstellen.

$$
\begin{aligned}
& 10x - 10 = 6x + 2 \mid -6x \\
\Leftrightarrow\ & 4x - 10 = 2 \mid +10 \\
\Leftrightarrow\ & 4x = 12 \mid : 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3 \Rightarrow L = \{3\}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
& 10 \cdot 3 - 10 = 6 \cdot 3 + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 30 - 10 = 18 + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 20 = 20 \ (w)
\end{aligned}
$$

Antwort: Die gesuchte Zahl lautet 3

Beispiel 2:
Ein Vater ist 38 Jahre alt, sein Sohn 11 Jahre. Nach wie viel Jahren ist der Vater doppelt so alt wie der Sohn?

Ansatz:
Die Variable x ist die Anzahl der Jahre, bis der Vater doppelt so alt ist wie sein Sohn.
Es ist zu berücksichtigen, dass der Sohn dann auch x Jahre älter geworden ist.
Das führt zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} & 38+x=2(11+x) \\ \Leftrightarrow\ & 38+x=22+2x \\ \Leftrightarrow\ & 22+2x=38+x \mid -x \\ \Leftrightarrow\ & 22+x=38 \mid -22 \\ \Leftrightarrow\ & x=16 \Rightarrow L=\{16\} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} & 38+16=2(11+16) \\ \Leftrightarrow\ & 54=2\cdot 27 \\ \Leftrightarrow\ & 54=54\ (w) \end{aligned}$$

Antwort: Nach 16 Jahren ist der Vater doppelt so alt wie der Sohn.
(Vater 54 Jahre, Sohn 27 Jahre)

Beispiel 3:
Ein Radfahrer fährt auf einer zweitägigen Radtour
am 1. Tag 1/5 der Strecke zuzüglich 60 km.
am 2. Tag 1/4 der Strecke zuzüglich 50 km.
aber an beiden Tagen gleich viel km.
Wie viel km muss der Radfahrer insgesamt zurücklegen?

Ansatz:
Die Variable x steht für die gesamte Strecke, die der Radfahrer in zwei Tagen zurücklegt. Daraus folgt die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}x+60=\frac{1}{4}x+50 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4}x+50=\frac{1}{5}x+60 \mid -\frac{1}{5}x-50 \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x}_{HN=20}=60-50 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5}{20}x-\frac{4}{20}x=10 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{20}x=10 \mid \cdot 20 \\ \Leftrightarrow\ & x=200 \Rightarrow L=\{200\} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}\cdot 200+60=\frac{1}{4}\cdot 200+50 \\ \Leftrightarrow\ & 40+60=50+50 \\ \Leftrightarrow\ & 100=100\ (w) \end{aligned}$$

Antwort: Insgesamt muss der Radfahrer 200 km zurücklegen.

Beispiel 4:

Drei Streufahrzeuge A, B und C haben in einer Nacht 360 km Autobahn gestreut, A doppelt soviel wie B und C 40 km weniger als A. Wie viel km Autobahn hat jedes Streufahrzeug abgestreut?

Ansatz:
Drei Streufahrzeuge A, B und C haben in einer Nacht 360 km Autobahn gestreut:
A + B + C = 360
A hat doppelt soviel gestreut wie B:
A = 2B
C hat 40 km weniger gestreut als A
C = A - 40 oder C = 2B - 40
Damit wird B als Variable gewählt und folgende Gleichung aufgestellt:

$$\begin{array}{ll} & 2B + B + 2B - 40 = 360 \\ \Leftrightarrow & 5B - 40 = 360 \;|\; +40 \\ \Leftrightarrow & 5B = 400 \;|\; :5 \\ \Leftrightarrow & B = 80 \\ & A = 2B \Leftrightarrow A = 2 \cdot 80 = 160 \\ & C = A - 40 \Leftrightarrow C = 160 - 40 = 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Probe:} & \\ & 2 \cdot 80 + 80 + 2 \cdot 80 - 40 = 360 \\ \Leftrightarrow & 160 + 80 + 160 - 40 = 360 \\ \Leftrightarrow & 360 = 360 \;(w) \end{array}$$

Antwort: Gestreut haben: B = 80 km, A = 160 km, C = 120 km.
Bemerkung zur Wahl der Bezeichnung der Variablen.
In den meisten Fällen ist x die Unbekannte. Man darf aber auch andere Bezeichnungen, wie z. B. den Buchstaben B für die Variable wählen.

Beispiel 5:

Ein Radweg ist 4000 m lang. Er führt durch eine Kurve, auf einen Hügel und über eine Brücke. Der Hügel ist 28 mal so lang und die Kurve ist 11 mal so lang wie die Brücke. Wie lang ist die Brücke?

Ansatz:
Die Variable x beschreibt die Länge der Brücke. Da sich alle Weglängen auf die Brücke beziehen, setzten sich die 4000 m aus 28 mal Brücke plus 11 mal Brücke plus 1 mal Brücke zusammen. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{array}{ll} & 11x + 28x + x = 4000 \\ \Leftrightarrow & 40x = 4000 \;|\; :40 \\ \Leftrightarrow & x = 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Probe:} & \\ & 11 \cdot 100 + 28 \cdot 100 + 100 = 4000 \\ \Leftrightarrow & 1100 + 2800 + 100 = 4000 \\ \Leftrightarrow & 4000 = 4000 \;(w) \end{array}$$

Antwort: Die Brücke ist 100 m lang.

Beispiel 6:
Zwei Oberstufenschüler fahren täglich mit ihren Autos vom gleichen Ort aus zum Berufskolleg. A legt pro Stunde durchschnittlich 60 km zurück, B 45 km. Wie viel Minuten nach Aufbruch von Schüler B werden sie sich treffen, wenn B fünf Minuten früher losfährt als A?

Ansatz:
Am Treffpunkt haben beide Schüler den gleichen Weg zurückgelegt.

$A: \quad s = v_A \cdot t \qquad B: \quad s = v_B \cdot t_1 + v_B \cdot t \qquad t_1 = 5\,\text{min}$

Der Schüler B ist $t_B = t + t_1$ min unterwegs.

Da die Zeit in Minuten gefragt ist,
werden die Geschwindigkeiten in km/min umgerechnet.

$$v_A = 60\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60\frac{\text{km}}{\text{h}}}{60\frac{\text{min}}{\text{h}}} = 1\frac{\text{km}}{\text{min}}; \qquad v_B = 45\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{45\frac{\text{km}}{\text{h}}}{60\frac{\text{min}}{\text{h}}} = \frac{3}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}}$$

Gleichung:

$$\begin{aligned}
& v_A \cdot t = v_B \cdot t_1 + v_B \cdot t \;|\; -v_B \cdot t \\
\Leftrightarrow \quad & v_A \cdot t - v_B \cdot t = v_B \cdot t_1 \\
\Leftrightarrow \quad & t\left(v_A - v_B\right) = v_B \cdot t_1 \;|\; :\left(v_A - v_B\right) \\
\Leftrightarrow \quad & t = \frac{v_B \cdot t_1}{\left(v_A - v_B\right)} \\
\Leftrightarrow \quad & t = \frac{\frac{3}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 5\,\text{min}}{\left(1\frac{\text{km}}{\text{min}} - \frac{3}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}}\right)} = \frac{\frac{3}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 5\,\text{min}}{\frac{1}{4}\frac{\text{km}}{\text{min}}} = 15\,\text{min} \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{15\,\text{min}\right\}}}
\end{aligned}$$

Für Schüler B gilt:

$t_B = t_1 + t = 5\,\text{min} + 15\,\text{min} = 20\,\text{min}$

Antwort:
Die Fahrzeit von Schüler A beträgt 15 Minuten, die von Schüler B 20 Minuten, da er 5 Minuten früher losgefahren ist.

Beispiel 7:

Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflussröhren A und B und eine Abflussröhre C. A allein füllt den Behälter in 90 min, B allein in 60 min, und durch C allein kann der Behälter in 45 min entleert werden.
In welcher Zeit (Stunden) ist der Behälter gefüllt, wenn alle Rohre zur gleichen Zeit in Tätigkeit sind?

Ansatz:
A allein füllt den Behälter in 1 Minute 1/90
B allein füllt den Behälter in 1 Minute 1/60
C allein leert den Behälter in 1 Minute 1/45
A + B - C füllen den Behälter in 1 Minute 1/90 + 1/60 - 1/45
A + B - C füllen in x Minuten den ganzen Behälter.
Mit der Variablen x wird die Gleichung aufgestellt:

$$\left(\underbrace{\frac{1}{90}+\frac{1}{60}-\frac{1}{45}}_{HN=180}\right)x=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{180}+\frac{3}{180}-\frac{4}{180}\right)x=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{180}x = 1 \mid \cdot 180$$

$$\Leftrightarrow x = 180 \Rightarrow L=\{180\}$$

Antwort: Der Behälter wird in 3 Stunden gefüllt.

Beispiel 8:

Zwei Wagen (Ferrari und BMW) starten gleichzeitig in Duisburg und Berlin und fahren einander entgegen. Der Ferrari fährt im Schnitt 160 km/h, der BMW 140 km/h. Die Entfernung Duisburg – Berlin beträgt 600 km.

a) Nach welcher Zeit begegnen sie sich?

b) Wie weit ist der Treffpunkt von Duisburg entfernt?

Ansatz:

Bei gleichzeitigem Start beider Wagen sind sie am Treffpunkt gleichlang unterwegs.
Der Ferrari hat die Strecke $s_F = v_F$ mal t zurückgelegt.
Der BMW hat die Strecke $s_B = v_B$ mal t zurückgelegt.
Die Addition beider Strecken ist die Entfernung Duisburg Berlin.

$$v_F \cdot t + v_B \cdot t = 600$$
$$\Leftrightarrow \left(v_F + v_B\right) \cdot t = 600 \,|: \left(v_F + v_B\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{600}{\left(v_P + v_B\right)}$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{600}{\left(160 + 140\right)} = \frac{600}{300} = 2 \Rightarrow L = \{2\}$$

$$s_F = v_F \cdot t = 160 \cdot 2 = 320$$
$$s_B = v_B \cdot t = 140 \cdot 2 = 280$$
Probe:
$$160 \cdot 2 + 140 \cdot 2 = 600$$
$$\Leftrightarrow 320 + 280 = 600$$

Antwort:

Nach 2 Stunden begegnen sich die Fahrer. Der Ferrari ist dann 320 km von Duisburg und 280 km von Berlin entfernt.

Beispiel 9:

Beim Kindergeburtstag machen sich der 4 jährige Darius, die 10 jährige Luise und der 14 jährige Till gemeinsam über eine Schüssel Schokoladenpudding her.
Darius würde allein in 36 Minuten die Schüssel leeren können.
Luise würde allein in 18 Minuten die Schüssel leeren können.
Till würde allein in 6 Minuten die Schüssel leeren können.
Wie lange dauert es, bis die drei die Schüssel gemeinsam geleert haben?

Ansatz:

Alle drei zusammen brauchen x Minuten.
Dabei werden die Anteile wie folgt verteilt:

$$\left(\underbrace{\frac{1}{36} \cdot x}_{\text{Darius}} + \underbrace{\frac{1}{18} \cdot x}_{\text{Luise}} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot x}_{\text{Till}} \right) = 1$$

Linke Seite der Gleichung auf den Hauptnenner 36 bringen

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{36}x + \frac{2}{36}x + \frac{6}{36}x \right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{36}x = 1 \,|\cdot \frac{36}{9}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 4 \Rightarrow L = \{4\}$$

Antwort:

In 4 Minuten haben die drei Leckermäuler den Schokoladenpudding verputzt.