Funktionen in der Mathematik

Bei der mathematischen Betrachtung natürlicher, technischer oder auch alltäglicher Vorgänge hängt der Wert einer Größe oft vom Wert einer anderen Größe ab, wie zum Beispiel der Benzinverbrauch eines Autos von der gefahrenen Geschwindigkeit. Einfache Zusammenhänge dieser Art wurden bereits in der Sekundarstufe I tabellarisch zusammengestellt und graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt.

Beispiele:
Der **Preis** einer Ware hängt oft von der verkauften **Menge** ab.
Die gemessene **Außentemperatur** hängt von der **Tageszeit** ab.
Der zurückgelegte **Weg** eines Radfahrers hängt bei gleichbleibender Geschwindigkeit von der **Fahrzeit** ab.
Die **Note** einer Mathematikarbeit hängt von der erreichten **Punktzahl** ab.
Der **Bremsweg** eines Fahrzeugs hängt im wesentlichen von seiner **Geschwindigkeit** ab.
Der **Zinsertrag** eines Kapitals hängt bei festem Zinssatz von der **Laufzeit** ab.
Die **Körpergröße** eines Kindes hängt von seinem jeweiligen **Alter** ab.

U1 Finden Sie weitere Beispiele für solche Abhängigkeiten.

Aus obigem Beispiel ist zu ersehen, das jeweils zwei Größen einander zugeordnet werden.

Menge	$\rightarrow$	Preis	Die verkaufte Menge beeinflusst den Preis.
Tageszeit	$\rightarrow$	Temperatur	Die Tageszeit hat einen Einfluss auf die gemessene Temperatur.
Punktzahl	$\rightarrow$	Note	Die in einer Klausur erreichte Punktzahl hat einen Einfluss auf die Note.

U2 Formulieren Sie für die restlichen Beispiele und für die, die Sie bei der Übung U1 gefunden haben die Zusammenhänge.

Die einander zugeordneten Größen nennt man **Variablen**.
Dabei ist zu überlegen, welche Abhängigkeit zwischen den Variablen besteht.

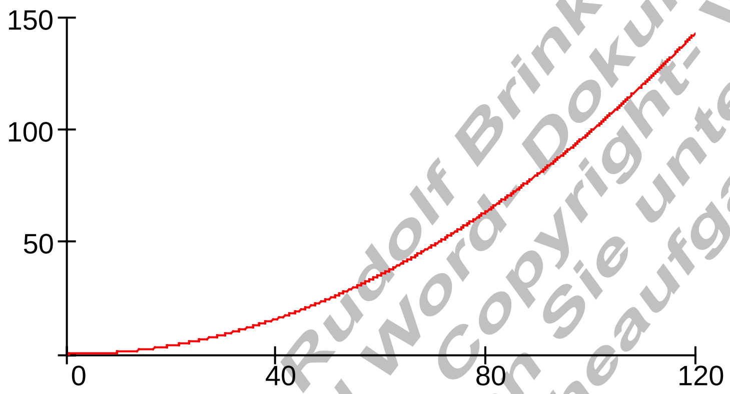
Die Note einer Mathematikarbeit hängt aus Sicht des Lehrers von der erreichten Punktzahl ab, nicht aber die Punktzahl von der Note.
Man bezeichnet daher die Note auch als **abhängige Variable** und die Punktzahl als **unabhängige Variable**.
Es besteht ein **funktionaler Zusammenhang** zwischen der Punktzahl und der Note.

Wie aus der Sekundarstufe I bekannt, gibt es mehrere Möglichkeiten den funktionalen Zusammenhang zweier Variablen zu beschreiben, bzw. darzustellen. Das soll nun am Beispiel des Bremswegs eines Autos gezeigt werden.

Für verschiedene Geschwindigkeiten wird der Bremsweg gemessen und in eine **Wertetabelle** eingetragen.

Geschwindigkeit in km/h (x)	20	40	60	80	100	120
Bremsweg in m (y)	4	16	36	64	100	144

Trägt man die Tabellenwerte in ein Koordinatensystem ein, so erhält man, nachdem die Punkte miteinander verbunden wurden, den **Graphen** der Funktion, die den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg beschreibt.
Auf der waagerechten Achse, auch **Abszisse** genannt findet man die Werte der unabhängigen Variablen x, auf der senkrechten Achse auch **Ordinate** genannt, findet man die Werte der abhängigen Variablen y = f(x).



U3 Tragen Sie entsprechend der Wertetabelle die Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem und verbinden Sie diese zu einem Graphen.
Bestimmen Sie durch ablesen den Bremsweg für die Geschwindigkeiten 30 ; 50 ; 70 ; 90 und 110 km/h.
Die Polizei misst einen Bremsweg von 90 m.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr das Fahrzeug?

Oft ist es auch möglich den funktionalen Zusammenhang durch eine Funktionsgleichung darzustellen.
Für den Bremsweg gilt: $y = f(x) = 0{,}01\,x^2$
Dabei steht y = f(x) für den Bremsweg und besagt, dass die y- Koordinate im Koordinatensystem von der Variablen x abhängt, also eine Funktion der unabhängigen Variablen x ist.
$f(x) = 0{,}01\,x^2$ ist die Funktionsgleichung, welche die Vorschrift angibt, wie die Werte für die abhängige Variable f(x) zu bilden sind.
Statt Funktionsgleichung sagt man auch $f(x) = 0{,}01\,x^2$ ist die **Funktionsvorschrift**.

U4 Berechnen Sie die abgelesenen Werte, wenn die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}01\,x^2$ lautet.

Nach dem bisher erarbeiteten lässt sich sagen:

Definition: Bei einer Funktion wird **jedem Wert** der unabhängigen Variablen x **genau ein** Funktionswert f(x) zugeordnet. Man sagt auch das es sich bei einer Funktion um eine **eindeutige Zuordnung** handelt.

$$\text{Schreibweise } \underbrace{f: x \to \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

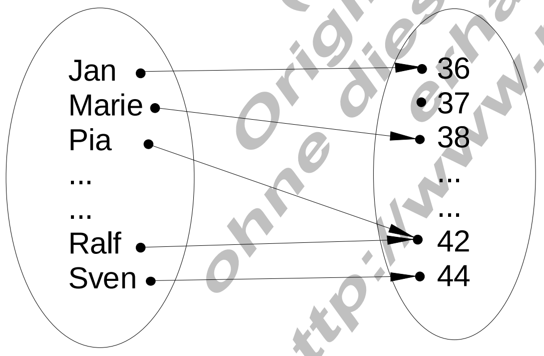
Wird in Zukunft von einer Funktion gesprochen, dann soll zur Beschreibung dieser lediglich die Funktionsgleichung angegeben werden, also nur noch f(x) = ...

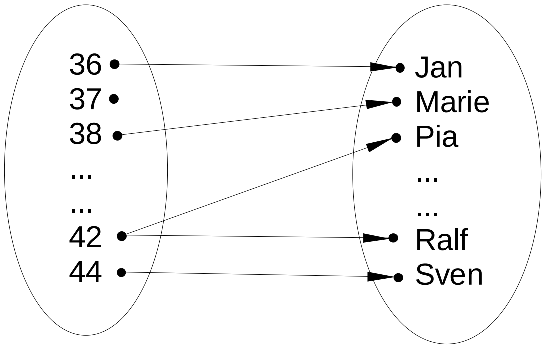
Der Name der Funktion ist f. Die Schreibweise x → f(x) verdeutlicht, dass zu jedem x-Wert ein bestimmter Funktionswert gehört. Die Funktionsgleichung f (x) = x – 1 gibt die Rechenvorschrift an, wie die Funktionswerte zu bilden sind.

Um die Eindeutigkeit der Zuordnung noch mal aufzuzeigen, folgendes Beispiel:
Jeder Schüler hat eine bestimmte Schuhgröße. Dabei ist es unerheblich dass mehrere Schüler die gleiche Schuhgröße haben.
Die Eindeutigkeit bezieht sich auf Schüler → Schuhgröße.
Ausgedrückt durch Variablen heißt das, der Name des Schülers bildet die unabhängige Variable, die ihm zugeordnete Schuhgröße die abhängige Variable.
Umgekehrt ist die Zuordnung der Schuhgröße zu Schülern nicht eindeutig, denn mehrere Schüler können z. B. die Schuhgröße 42 haben.
Eine Funktion dieser Art hat keine Funktionsgleichung, sie kann aber als Mengenbild dargestellt werden.

Eindeutige Zuordnung
(Fuktion)

Zuordnung ist nicht eindeutig
(keine Funktion)





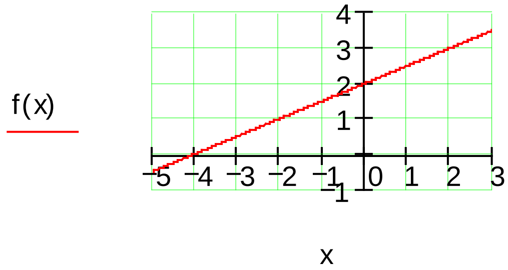
Menge der Schüler
(Definitionsmenge)

Menge der Schuhgrößen
(Wertemenge)

Vertauschung
der beiden Mengen

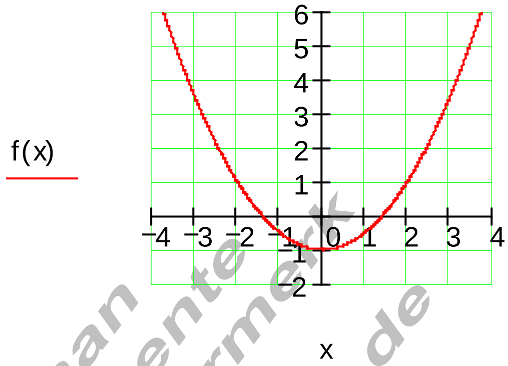
Beispiele mathematischer Funktionen und Funktionsgleichungen.

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$$



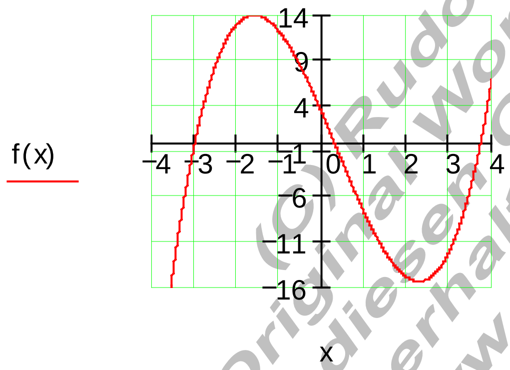
Lineare Funktion (Gerade)

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$$



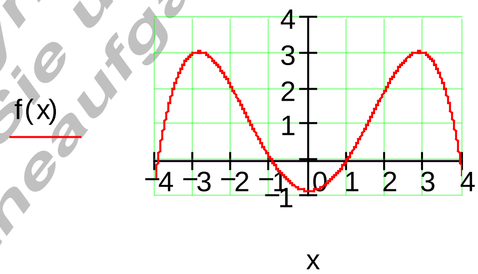
Quadratische Funktion (Parabel)

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



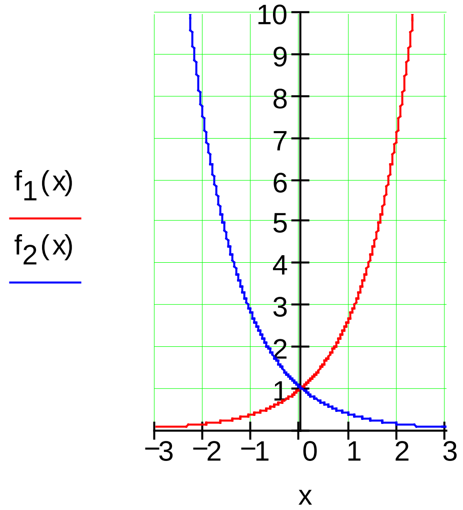
Ganzrationale Funktion 3. Grades

$$f(x) := \frac{-7}{120} \cdot x^4 + \frac{23}{24} \cdot x^2 - \frac{9}{10}$$

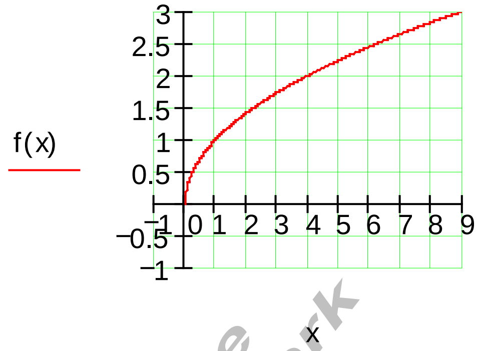


Ganzrationale Funktion 4. Grades

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x} \qquad f(x) := \sqrt{x}$

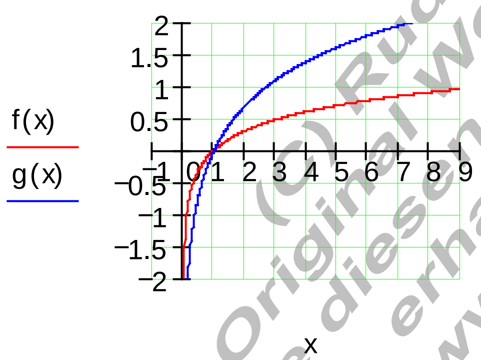


Exponentialfunktionen



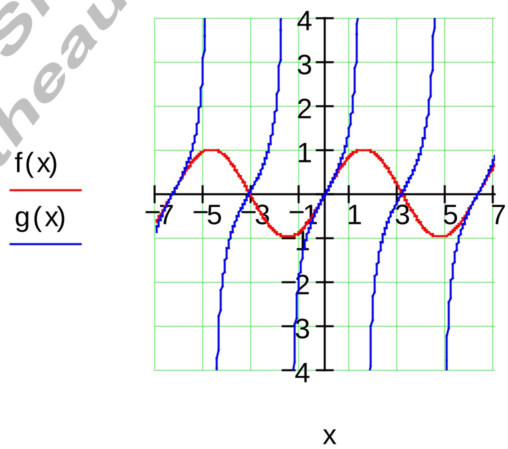
Wurzelfunktion

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



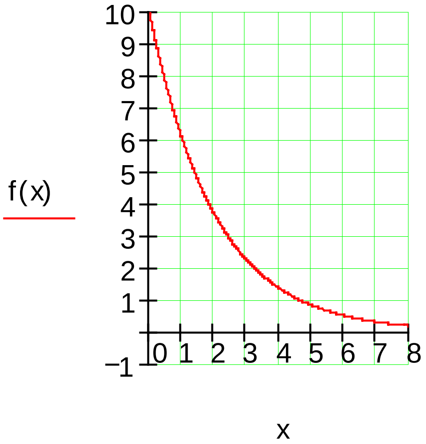
Logarithmusfunktionen

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



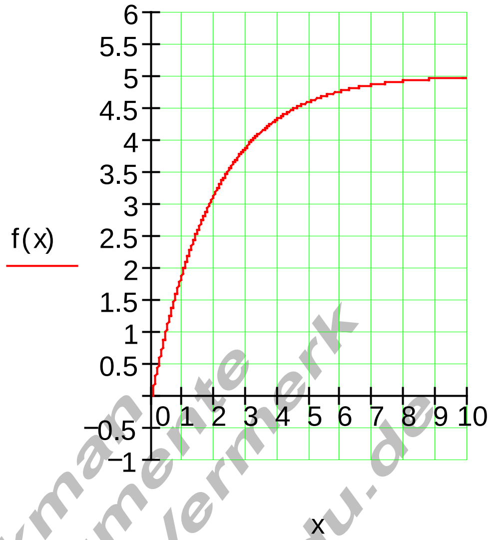
Trigonometrische Funktionen

$$f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}$$



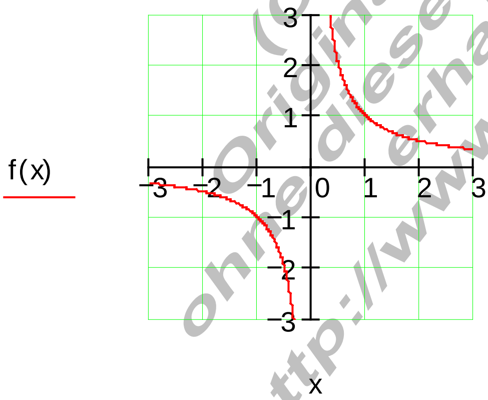
exponentielles abklingen

$$f(x) := 5 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot x}\right)$$



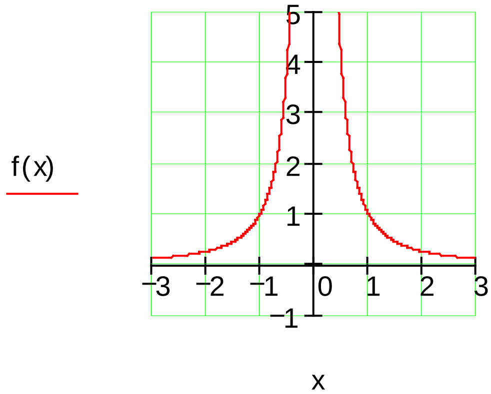
exponentielle Sättigungskurve

$$f(x) := \frac{1}{x}$$



Hyperbel punktsymmetrisch

$$f(x) := \frac{1}{x^2}$$



Hyperbel achsensymmetrisch

Definitions- und Wertemenge

Definition: Die **Definitionsmenge D** einer Funktion ist die Menge aller unabhängigen Variablen, für die die Funktion definiert ist.
Die **Wertemenge W** ist die Menge aller Funktionswerte, die aus den Elementen von D entstehen.

Beispiele:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen.

$f(x) = \frac{1}{x}$ Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Durch Null darf nicht dividiert werden.

$f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}$

Die Funktion kann jeden beliebigen Wert annehmen

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}_+$

Als Funktionswerte treten nur positive Werte auf.

Mathematische Schreibweise bei Funktionsgleichungen und deren Bedeutung

$f(4) = 7$ Für den Wert der unabhängigen Variablen x = 4 ist der Funktionswert 7. Das Wertepaar (4 | 7) bildet die Koordinaten des Punktes P (4 | 7) im Koordinatensystem.

$f(x) = 9$ Gesucht wird der x- Wert, zu dem der Funktionswert 9 gehört.

$y = f(5)$ y ist der Funktionswert für x = 5.

Zusammenfassung
Eine eindeutige Zuordnung, bei der einer unabhängigen Variablen x aus der Definitionsmenge D genau ein Funktionswert f(x) zugeordnet wird heißt Funktion.

Der funktionale Zusammenhang wird durch eine Funktionsgleichung (z.B. f(x) = 2x + 1) beschrieben.
Durch Einsetzen von x- Werten in die Funktionsgleichung erhält man Funktionswerte, die zusammen mit den x- Werten in einer Wertetabelle dargestellt werden können.

Jedes Wertepaar der Tabelle entspricht genau einem Punkt im kartesischen Koordinatensystem.

In vielen Fällen lassen sich die so entstandenen Punkte zu einem Graphen verbinden.
Die Menge aller x- Werte, die in die Funktionsgleichung eingesetzt werden dürfen heißt Definitionsmenge.
Die Menge aller Funktionswerte, die dabei entstehen, gehören zur Wertemenge W der Funktion.

Lösung der Übungen:

U1: Finden Sie weitere Beispiele für solche Abhängigkeiten.
Lösung:
Die **Leistung** eines Verbrennungsmotors hängt von der **Drehzahl** ab.
Die **Fläche** eines Kreises hängt von seinem **Radius** ab.
Die **Stromrechnung** hängt bei konstantem kWh- Preis von der **Energiemenge** ab.

U2: Formulieren Sie für die restlichen Beispiele und für die, die Sie bei der Übung U1 gefunden haben die Zusammenhänge.

Lösung:

Fahrzeit	$\rightarrow$	Weg	Bei gleichbleibender Geschwindigkeit beeinflusst die Fahrzeit den zurückgelegten Weg.
Geschwindigkeit	$\rightarrow$	Bremsweg	Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs beeinflusst die Länge des Bremswegs.
Laufzeit	$\rightarrow$	Zinsertrag	Die Laufzeit einer Kapitalanlage beeinflusst den Zinsertrag.
Alter	$\rightarrow$	Körpergröße	Das Alter des Kindes beeinflusst seine Körpergröße.
Drehzahl	$\rightarrow$	Leistung	Die Drehzahl eines Verbrennungsmotors beeinflusst die Motorleistung.
Radius	$\rightarrow$	Fläche	Der Radius eines Kreises beeinflusst seine Fläche.
Energiemenge	$\rightarrow$	Stromrechnung	Die genutzte Energiemenge beeinflusst die Stromrechnung.

U3: Tragen Sie entsprechend der Wertetabelle die Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem und verbinden Sie diese zu einem Graphen.
Bestimmen Sie durch ablesen den Bremsweg für die Geschwindigkeiten 30 ; 50 ; 70 ; 90 und 110 km/h.
Die Polizei misst einen Bremsweg von 90 m.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr das Fahrzeug?

Lösung:
Für die Geschwindigkeit von 30 km/h beträgt der Bremsweg etwa 9 m.
Für die Geschwindigkeit von 50 km/h beträgt der Bremsweg etwa 25 m.
Für die Geschwindigkeit von 70 km/h beträgt der Bremsweg etwa 48 m.
Für die Geschwindigkeit von 90 km/h beträgt der Bremsweg etwa 80 m.
Für die Geschwindigkeit von 110 km/h beträgt der Bremsweg etwa 120 m.
Bei einem gemessenen Bremsweg von 90 m fuhr das Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von etwa 95 km/h.

Zur Vorgehensweise:

Die x- Achse (Abszisse) des Koordinatensystems repräsentiert die Menge der unabhängigen Variablen, die y- Achse (Ordinate) die der abhängigen Variablen.

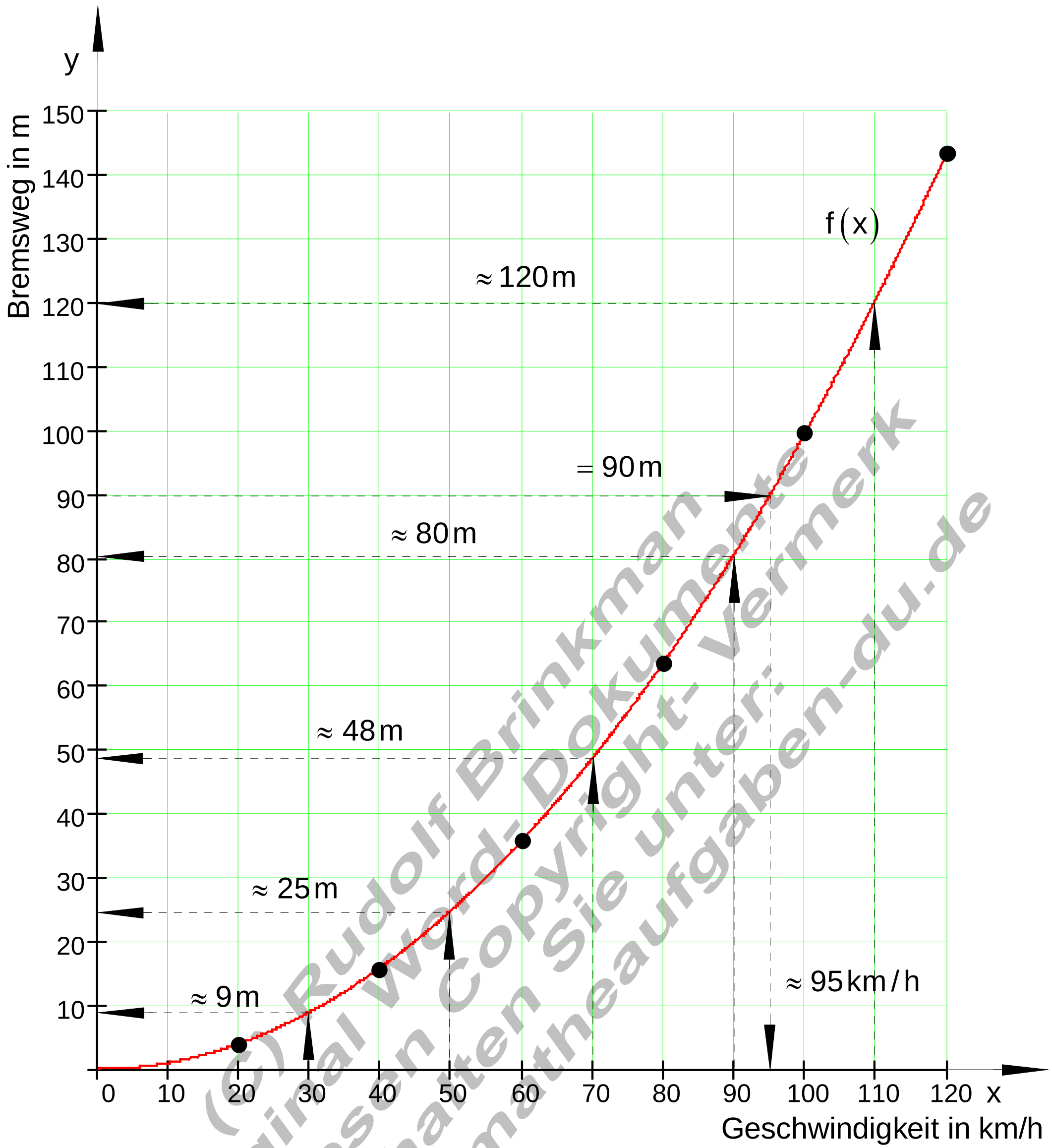
Bevor Wertepaare in ein Koordinatensystem als Punkte eingetragen werden ist immer zu überlegen, welche die unabhängige und welche die abhängige Variable ist.

Weiterhin ist es wichtig einen geeigneten Maßstab für die Skalierung der Achsen zu finden.
Dazu schaut man sich die größten und die kleinsten Werte der Tabelle an und entscheidet in wie viel Teile die beiden Achsen einzuteilen sind.

Hat man dann entsprechend der Wertetabelle alle Punkte in das Koordinatensystem eingetragen, so verbindet man diese Punkte zu einem Graphen.

Nun lassen sich aus dem Graphen auch für solche x- Werte, die nicht in der Wertetabelle vorkommen, die entsprechenden Funktionswerte mehr oder weniger genau ablesen.

Umgekehrt kann man für einen bestimmten Funktionswert auch den zugehörigen x- Wert ablesen. Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt davon ab, wie genau der Graph gezeichnet wurde.



U4: Berechnen Sie die abgelesenen Werte, wenn die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}01\,x^2$ lautet.

Lösung:
Die Funktionswerte werden berechnet, indem man die entsprechenden x- Werte in die Funktionsgleichung einsetzt.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

Bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h beträgt der Bremsweg 9 m

Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h beträgt der Bremsweg 25 m
Bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h beträgt der Bremsweg 49 m
Bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h beträgt der Bremsweg 81 m
Bei einer Geschwindigkeit von 110 km/h beträgt der Bremsweg 121 m

Gemessen wurde ein Bremsweg von 90 m, gesucht ist die Geschwindigkeit.
Ansatz: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ diese Gleichung ist nach x aufzulösen.

$0{,}01x^2 = 90 \,|: 0{,}01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$

Betrag auflösen: $|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94{,}9$

Nur der positive Wert ist in Bezug der Aufgabenstellung sinnvoll, da wir nur positive Geschwindigkeiten betrachten.
Bei einem gemessenen Bremsweg von 90 m betrug die Geschwindigkeit etwa 94,9 km/h.

Bemerkung:
Erst die Rechnung liefert genaue Werte, dennoch ist es sinnvoll, die berechneten Werte durch ablesen aus dem Graphen zu kontrollieren.