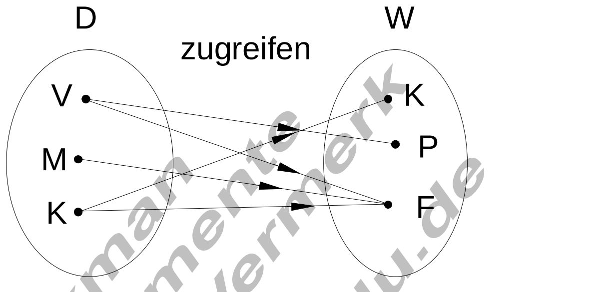
Relationen und Funktionen

Eine Familie, bestehend aus den Eltern und einem Kind, tritt per Flugzeug ihre Urlaubsreise an.
Kurz vor dem Start geht die Stewardess mit einem Tablett herum, auf dem Kaugummi, Pfefferminz und Fruchtbonbons angeboten werden.
Durch ein Pfeildiagramm wird gezeigt, wer von den dreien zu welchen der angebotenen Süßigkeiten greift.

Vater greift zu Pfefferminz und Fruchtbonbon Mutter greift zu Fruchtbonbon Kind greift zu Kaugummi und Fruchtbonbon D = Definitionsmenge W = Wertemenge	

Auf diese Weise entstehen geordnete Paare, die man zu einer Relation R zusammenfassen kann.

$R = \{ (V|P);(V|F);(M|F);(K|K);(K|F) \}$

Definition	Eine Paarmenge, bei der die Elemente aufgrund einer Zuordnungsvorschrift gebildet werden, heißt Relation.

Würde jedes Familienmitglied, also Vater Mutter und Kind von jeder der angebotenen Süßigkeiten nehmen, so erhielte man eine besondere Relation, die Produktmenge D x W.

$D \times W = \{ (V|K);(V|P);(V|F);(M|K);(M|P);(M|F);(K|K);(K|P);(K|F) \}$
Die Produktmenge D x W umfasst alle Zuordnungsmöglichkeiten (jeder nimmt von jedem).
Damit ist auch jede Teilmenge der Produktmenge eine Relation.

Definition	Die Produktmenge D X W ist die Menge aller geordneten Paare $(x \mid y)$ mit $x \in D$ und $y \in W$

Für obiges Beispiel gilt: $R \subset D \times W$

Darstellungsarten von Relationen

Eine Zahl kann man als Punkt auf der **Zahlengeraden** darstellen.
Bei einem Zahlenpaar benutzt man dafür die Zahlenebene.
Zwei Zahlengeraden kreuzen sich senkrecht und bilden ein **Gitternetz**.
Dafür werden jetzt neue Begriffe eingeführt.

Die waagerechte Zahlengerade heißt **x – Achse** oder **Abszissenachse**, die senkrechte
y – Achse oder **Ordinatenachse.**

Der Schnittpunkt der x – und der y – Achse heißt **0 – Punkt** oder **Ursprung.**
Die Einteilung der Zahlenabschnitte in Einheiten kann auf beiden Achsen verschieden sein.

Die beiden **Komponenten** eines Zahlenpaares oder allgemein eines Variabelenpaares (x | y) nennt man **Koordinaten**.

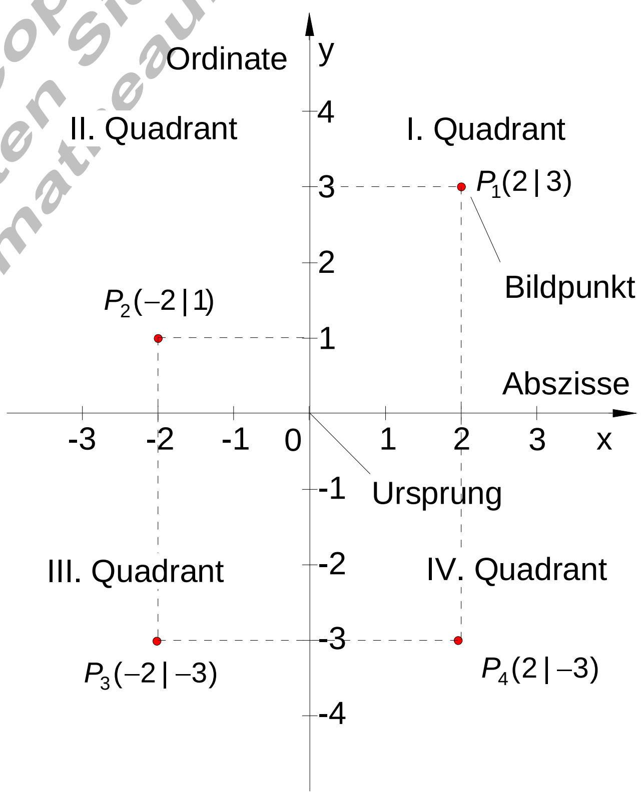
Dabei steht die **Abszisse** (x – Koordinate) an erster Stelle, die **Ordinate** (y – Koordinate) an zweiter Stelle des Variabelenpaares. Zu jedem Zahlenpaar (x | y) gehört ein **Bildpunkt**
P (x | y).

Das nebenstehende Gitternetz heißt nach dem französischen Mathematiker und Philosophen Rene Descartes **rechtwinkliges** oder **Kartesisches Koordinatensystem**.

Die Achsen teilen das Koordinatensystem in 4 Felder **(Quadranten) I., II., III., und IV.**

An dem Vorzeichen der Koordinaten erkennt man, in welchem Quadranten der betreffende Punkt liegt.

P_1 (2 | 3) liegt im I. Quadranten
P_2 (-2 | 1) liegt im II. Quadranten
P_3 (-2 | -3) liegt im III. Quadranten
P_4 (2 | -3) liegt im IV. Quadranten



Kartesisches Koordinatensystem

Beispiel:

Gegeben ist die Relation

$R = \left\{ (x \mid y) \mid y = 2x \right\}_{D \times W}$

für $D = \{x \mid -3 \le x \le 3\}_{\mathbb{Z}}$

und $W = \{y \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{Z}}$

Gesucht:

a) R als Menge geordneter Paare

b) Der Wertebereich der Relation $W_{\mathbb{R}}$

c) Der Definitionsbereich der Relation $D_{\mathbb{R}}$

d) Der Graph der Relation

e) Der Graph der Relation in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

mit $R = \left\{ (x \mid y) \mid y = 2x \right\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

und $D = \{x \mid -3 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

und $W = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

Lösung:

a) Die Menge der geordneten Paare für

$D = \{ -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 \}$

$W = \{ -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$

$y = 2x$

ist:

$R = \{ (-3 \mid -6) ; (-2 \mid -4) ; (-1 \mid -2) ;$
$(0 \mid 0) ; (1 \mid 2) ; (2 \mid 4) ; (3 \mid 6) \}$

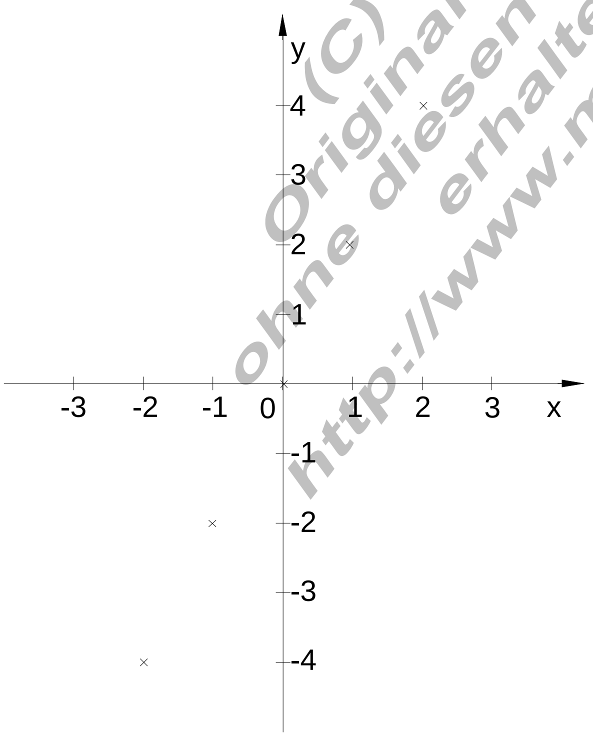
b) Der Wertebereich

$W_R = \{ -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 \}$

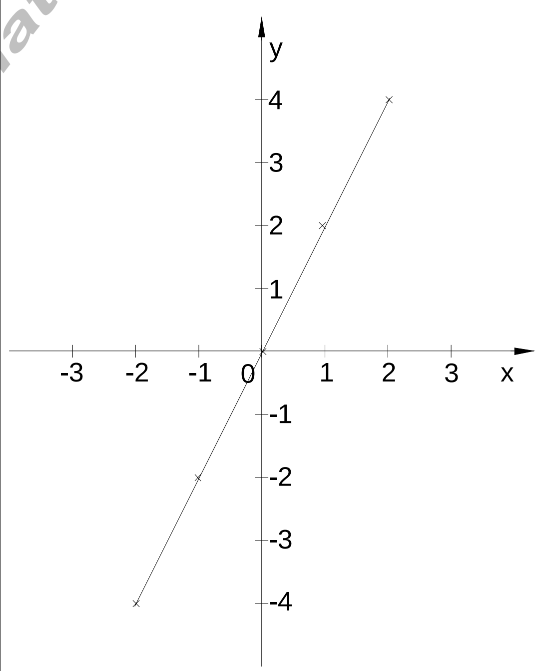
c) Der Definitionsbereich

$D_R = \{ -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 \}$

d) Der Graph der Relation besteht nur aus Punkten.

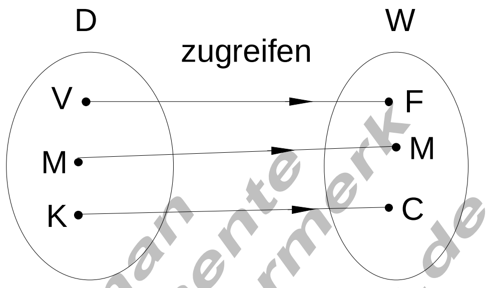


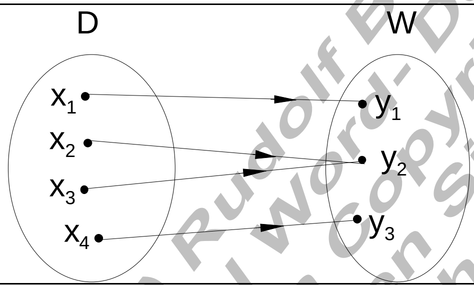
e) Der Graph der Relation in IR x IR besteht aus einer durchgezogenen Linie.

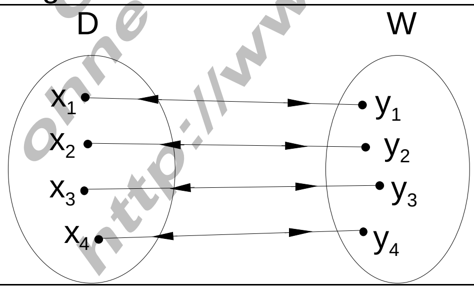


Der Funktionsbegriff

Eine halbe Stunde nach dem Start geht die Stewardess wieder mit einem Tablett herum und bietet Zeitschriften an.
Auf dem Tablett liegen eine Frankfurter Allgemeine Zeitung, ein Modejournal und ein Comicheft.

Der Vater greift zur FAZ Die Mutter greift zum Modejournal Das Kind greift zum Comicheft Auf diese Weise entsteht eine **eindeutige Relation**. $R = \{ (V \mid F) ; (M \mid M) ; (K \mid C) \}$	

Definition	Eine Relation heißt ***eindeutig***, wenn jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Wertemenge zugeordnet ist.
	

Definition	Eine Relation heißt ***eineindeutig***, wenn die Zuordnung auch umkehrbar eindeutig ist, d.h. wenn jedem Element aus D genau ein Element aus W und jedem Element aus W genau ein Element aus D zugeordnet ist.
	

Definition	Eine zumindest eindeutige Relation R heißt ***Funktion f*** $R = f = \left\{ (x \mid y) \,\middle|\, (x_1 \mid y_1) ; (x_2 \mid y_2) ; (x_3 \mid y_2) ; (x_4 \mid y_3) \right\}_{D \times W}$

Darstellungsarten von Funktionen

Mengenschreibweise: $f = \{(x \mid y) \mid y = f(x)\}_{D \times W}$

Die Funktion f ist die Menge aller geordneten Paare (x| y), für die die Funktionsgleichung y = f(x) gilt in der Grundmenge $D \times W$.

Zuordnungsschreibweise: $f : x \mapsto f(x) \text{ mit } f(x) = y \text{ in } D \times W$

Die Funktion f ist definiert als die Zuordnung: x wird zugeordnet einem f(x) mit der Funktionsgleichung f(x) = y in der Grundmenge
D x W.

Im folgenden wird die Mengenschreibweise bevorzugt.

Beispiel:

$f = \{(x \mid y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

Berechnung der Werte

am Beispiel für $x_1 = -2$:

$x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 2x_1 + 3$

$= f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$

Wertetabelle:

x	–2	–1	0	2
$y = f(x)$	–1	1	3	7

Der Graph: