Wurzelgleichungen und Exponentialgleichungen mit Lösungsbeispielen

Gleichungen in denen Wurzelterme vorkommen nennt man **Wurzelgleichungen**.
Im folgenden Beispiel soll das Lösungsverfahren genauer betrachtet werden.

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge der Gleichung: $3\cdot\sqrt{5x+1}=4\cdot\sqrt{2x+3}$

Wie bei allen Gleichungen gehören zur Lösungsmenge von Wurzelgleichungen nur Elemente aus der Definitionsmenge D, die für jede Gleichung zu bestimmen ist.

Bezeichnet man den linken Wurzelterm mit T_1 und den rechten mit T_2 so gilt:	$T_1=\sqrt{5x+1} \quad T_2=\sqrt{2x+3}$
Da die Definitionsmenge von Quadratwurzeln keine negativen Radikanden in IR zulässt, gilt:	$5x+1\geq 0 \quad\wedge\quad 2x+3\geq 0$ $5x\geq -1 \quad\wedge\quad 2x\geq -3$ $x\geq -\frac{1}{5} \quad\wedge\quad x\geq -\frac{3}{2}$
Definitionsmenge von T_1:	$D(T_1)=\left\{x \mid x\geq -\frac{1}{5}\right\}_{\mathbb{R}}$
Definitionsmenge von T_2:	$D(T_2)=\left\{x \mid x\geq -\frac{3}{2}\right\}_{\mathbb{R}}$
Die Definitionsmenge D ist die Schnittmenge der Definitionsmengen, von T_1 und T_2. Es gehören also nur solche Elemente zur Definitionsmenge, die größer oder gleich –1/5 sind.	$D=D(T_1)\cap D(T_2)$ $=\left\{x \mid x\geq -\frac{1}{5}\wedge x\geq -\frac{3}{2}\right\}_{\mathbb{R}}$ $=\left\{x \mid x\geq -\frac{1}{5}\right\}_{\mathbb{R}}$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge müssen die in der Gleichung vorkommenden Quadratwurzeln beseitigt werden.
Das geschieht durch Quadrieren beider Seiten der Gleichung.
Ausmultiplizieren und Äquivalenzumformungen nach x.

$3\cdot\sqrt{5x+1}=4\cdot\sqrt{2x+3}$ $\Leftrightarrow (3\cdot\sqrt{5x+1})^2=(4\cdot\sqrt{2x+3})^2$ $\Leftrightarrow 9(5x+1)=16(2x+3)$ $\Leftrightarrow 45x+9=32x+48$ $\Leftrightarrow 13x=39$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=3\in D}}$	Zur Probe wird das Lösungselement in die Wurzelgleichung eingesetzt: $3\cdot\sqrt{5x+1}=4\cdot\sqrt{2x+3}$ $\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{5\cdot 3+1}=4\cdot\sqrt{2\cdot 3+3}$ $\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{16}=4\cdot\sqrt{9}$ $\Leftrightarrow 3\cdot 4=4\cdot 3$ $\Leftrightarrow 12=12 \quad (w)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{L=\{3\}}}$

Durch das Einsetzen von x = 3 in die Wurzelgleichung ergibt sich eine wahre Aussage, die die Richtigkeit der Lösung bestätigt.

Folgendes Problem kann sich ergeben: Ist das Potenzieren der Quadratwurzeln eine Äquivalenzumformung, oder kann durch das Quadrieren noch ein weiteres Element hinzukommen, das gar nicht zu der ursprünglichen Gleichung gehört?	Beispiel: $x = 3$ $\Leftrightarrow x^2 = 9 \quad \vert \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = 3 \Rightarrow x = 3 \vee -x = 3$ $\Rightarrow x = 3 \vee x = -3$ $\Rightarrow L = \{-3\,;3\}$

Durch das Quadrieren ist also das Element –3 zusätzlich hinzugekommen.
Es ist daher nicht nur wichtig, **sondern unbedingt erforderlich**, nach einer Umformung durch Potenzieren auf beiden Seiten der Gleichung die **Probe** zu machen.

Beispiel:

$\sqrt{x^2-1} = x-3$ Definitionsbereich: $x^2 - 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow x^2 \geq 1$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \vee -x \geq 1$ $\Rightarrow x \geq 1 \vee x \leq 1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid -1 < x < 1\}_{\mathbb{R}}}}$	Lösung: $\sqrt{x^2-1} = x-3$ $\Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2 - 6x + 9$ $\Leftrightarrow 6x = 10$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{5}{3}}} \wedge x \in D$	Probe durch einsetzen: $\sqrt{x^2-1} = x-3$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{9}{9}} = \frac{5}{3} - \frac{9}{3}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\ (f) \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = \{\ \}}}$

Das bedeutet, es gibt keinen Wert für x der obige Gleichung erfüllt.

Beispiel:

$\sqrt{7x+8}=2x-2$ Definitionsbereich: $7x+8\ge 0$ $\Leftrightarrow 7x\ge -8$ $\Leftrightarrow x\ge -\frac{8}{7}$ $\Rightarrow D=\left\{x \mid x\ge -\frac{8}{7}\right\}_{\mathbb{R}}$	Lösung: $\sqrt{7x+8}=2x-2$ $\Leftrightarrow 7x+8=(2x-2)^2$ $\Leftrightarrow 7x+8=4x^2-8x+4$ $\Leftrightarrow 4x^2-15x-4=0$ $\Leftrightarrow x^2-\frac{15}{4}x-1=0$ $\Rightarrow p=-\frac{15}{4} \quad q=-1$ $x_1=\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{225}{64}+\frac{64}{64}}=\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{289}{64}}$ $=\frac{15}{8}+\frac{17}{8}=\frac{32}{8}=\underline{\underline{4}}$ $x_2=\frac{15}{8}-\frac{17}{8}=-\frac{2}{8}=\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$
Probe für $x_1=4$ $\sqrt{7x+8}=2x-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{7\cdot 4+8}=2\cdot 4-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{36}=6$ $\Leftrightarrow 6=6 \quad (w)$	Probe für $x_2=-\frac{1}{4}$ $\sqrt{7x+8}=2x-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{7\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+8}=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{7}{4}+\frac{32}{4}}=-\frac{2}{4}-\frac{8}{4}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{4}}=-\frac{10}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{5}{2}=-\frac{5}{2} \quad (f)\Rightarrow -\frac{1}{4}\notin L$
Lösung: $\sqrt{7x+8}=2x-2 \quad \Rightarrow \quad L=\underline{\underline{\{4\}}}$	

Beispiel:

$$3\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+3}$$

Definitionsbereich:

$$\Rightarrow x-2\geq 0 \quad\wedge\quad x+5\geq 0 \quad\wedge\quad 2x+3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\geq 2 \quad\wedge\quad x\geq -5 \quad\wedge\quad x\geq -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D=\{x\,|\,x\geq 2\}_{\mathbb{R}}}}$$

Lösung:

$$3\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow (3\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{x+5})^2=(\sqrt{2x+3})^2$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot(x-2)-6\sqrt{(x-2)(x+5)}+x+5=2x+3$$

$$\Leftrightarrow 9x-18-6\sqrt{(x-2)(x+5)}+x+5-2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow 8x-16-6\sqrt{(x-2)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x-8-3\sqrt{(x-2)(x+5)}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x-8=3\sqrt{(x-2)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow (4x-8)^2=\left[3\sqrt{(x-2)(x+5)}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-64x+64=9(x-2)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-64x+64=9(x^2+5x-2x-10)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-64x+64=9x^2+27x-90$$

$$\Leftrightarrow 7x^2-91x+154=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-13x+22=0$$

$$\Rightarrow p=-13 \qquad q=22$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{88}{4}}$$

$$=\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{13}{2}+\frac{9}{2}=\frac{22}{2}=\underline{\underline{11}}$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{13}{2}-\frac{9}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2}}$$

Probe für $x=11$

$$3\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{11-2}-\sqrt{11+5}=\sqrt{22+3}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{9}-\sqrt{16}=\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow 9-4=5 \quad (w)\Rightarrow 11\in L$$

Probe für $x=2$

$$3\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\sqrt{2-2}-\sqrt{2+5}=\sqrt{2\cdot 2+3}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot 0-\sqrt{7}=\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{7}=\sqrt{7} \quad (f)$$

$$\Rightarrow 2\notin L$$

Damit ist die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\{11\}}}$$

Exponentialgleichungen

Aussageformen, bei denen die Lösungsvariable in Exponenten von Wurzeln oder Potenzen vorkommen, heißen Exponentialgleichungen oder – Ungleichungen.

Die Lösungsmengen solcher Aussageformen lassen sich meistens durch Anwendung der Logarithmengesetze ermitteln.

Beispiel:

$2^{3x+4}=1024$	Probe durch Einsetzen:
$\Leftrightarrow 2^{3x+4}=2^{10} \quad \mid \lg$	$2^{3x+4}=1024$
$\Leftrightarrow \lg\left(2^{3x+4}\right)=\lg\left(2^{10}\right)$	$\Leftrightarrow 2^{3\cdot 2+4}=2^{10}$
$\Leftrightarrow (3x+4)\cdot\lg 2=10\cdot\lg 2 \quad \mid :\lg 2$	$\Leftrightarrow 2^{10}=2^{10} \quad (w)$
$\Leftrightarrow 3x+4=10 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$	$\underline{\underline{L=\{2\}}}$

Lösung durch Exponentenvergleich: $2^{3x+4}=2^{10} \Leftrightarrow 3x+4=10$
Eine Lösung mittels Exponentenvergleich ist nur dann möglich, wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Aussageform so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben.

Beispiel:

$3\cdot 2^{x+3}=64\cdot 3^{x-2} \quad \mid \lg$	Probe durch Einsetzen:
$\Leftrightarrow \lg\left(3\cdot 2^{x+3}\right)=\lg\left(64\cdot 3^{x-2}\right)$	$3\cdot 2^{x+3}=64\cdot 3^{x-2}$
$\Leftrightarrow \lg 3+(x+3)\cdot\lg 2=\lg 64+(x-2)\cdot\lg 3$	$\Leftrightarrow 3\cdot 2^{3+3}=64\cdot 3^{3-2}$
$\Leftrightarrow (x+3)\cdot\lg 2-(x-2)\cdot\lg 3=\lg 64-\lg 3$	$\Leftrightarrow 3\cdot 2^{6}=64\cdot 3$
$\Leftrightarrow x\lg 2+3\lg 2-x\lg 3+2\lg 3=\lg 64-\lg 3$	$\Leftrightarrow 3\cdot 64=64\cdot 3 \quad (w)$
$\Leftrightarrow x\lg 2-x\lg 3=\lg 64-\lg 3-3\lg 2-2\lg 3$	$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{3\}}}$
$\Leftrightarrow x(\lg 2-\lg 3)=\lg 64-3\lg 3-3\lg 2$	
$\Leftrightarrow x=\dfrac{\lg 64-3\lg 3-3\lg 2}{(\lg 2-\lg 3)}=3$	

Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden.
Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Beispiel:

$90 \cdot 3^{3x-2} - 9^{3x-2} - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3x-2} - \left(3^2\right)^{3x-2} - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3x-2} - 3^{2\cdot(3x-2)} - 729 = 0$

Substitution:

$3^{3x-2} = z \quad 3^{2(3x-2)} = z^2$

$\Rightarrow 90 \cdot z - z^2 - 729 = 0 \quad$ (quadr. Gl.)

$\Rightarrow z_1 = 9 \quad \vee \quad z_2 = 81$

Einsetzen von z_1 bzw. von z_2

in den Substitutionsterm z

$3^{3x-2} = z_1 \qquad 3^{3x-2} = z_2$

$\Leftrightarrow 3^{3x-2} = 9 \qquad 3^{3x-2} = 81$

$\Leftrightarrow 3^{3x-2} = 3^2 \qquad 3^{3x-2} = 3^4$

$\Leftrightarrow 3x - 2 = 2 \qquad 3x - 2 = 4$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3} \qquad x_2 = 2$

Probe für $x_1 = \frac{4}{3}$

$90 \cdot 3^{3x_1-2} - 9^{3x_1-2} - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3\cdot\frac{4}{3}-2} - 9^{3\cdot\frac{4}{3}-2} - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^2 - 9^2 - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad (w)$

Probe für $x_2 = 2$

$0 \cdot 3^{3x_2-2} - 9^{3x_2-2} - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^{3\cdot 2-2} - 9^{3\cdot 2-2} - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 90 \cdot 3^4 - 9^4 - 729 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad (w)$

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}}}$$