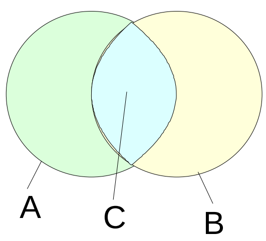
Verknüpfungen von Mengen

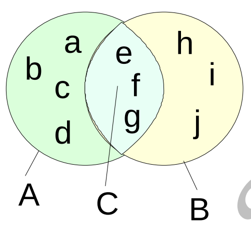
Durch Verknüpfungen von Mengen lassen sich andere Mengen bilden, die zu ihren Ausgangsmengen in bestimmten Beziehungen stehen. Dies ist in der Mathematik von Bedeutung, um Schreibweisen zu vereinfachen und das Erkennen von Strukturen zu erleichtern. Die wichtigsten Verknüpfungen sind Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Restmenge und Produktmenge.

Die Schnittmenge

Definition	Die **Schnittmenge** ist diejenige Menge, deren Elemente sowohl in der einen als auch in der anderen Ausgangsmenge enthalten sind. $C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Verknüpfungszeichen $\cap$ $C = A \cap B$

	Die Menge *C* ist die Schnittmenge von *A* und *B* oder kurz ausgedrückt, *C* ist gleich A geschnitten B Die Schnittmengenbildung ist nicht auf zwei Mengen beschränkt. $S = \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \wedge ...\}$ $S = A \cap B \cap C$

Beispiel:



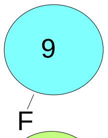
Gegeben sind die Mengen *A* und *B* mit
A = {*a;b;c;d;e;f;g*} und *B* = {*e;f;g;h;i;j*}
Die Schnittmenge soll ermittelt werden.

$C = A \cap B = \{e\,;f\,;g\}$

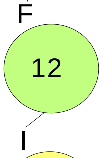
Die Elemente *e, f* und *g* sind sowohl in der Menge *A* als auch in der Menge *B* enthalten

Beispiel:

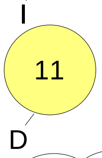
Die Schule bietet Kurse in Fotografie, Informatik und Digitaltechnik an, die die Schüler auf freiwilliger Basis besuchen können. Von der Klasse SF13S mit 20 Schülern wählen



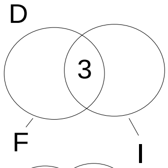
Neun Schüler den Fotokurs (*F*)



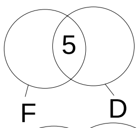
Zwölf Schüler den Informatikkurs (*I*)



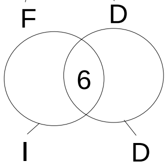
und
Elf Schüler den Digitalkurs (*D*)



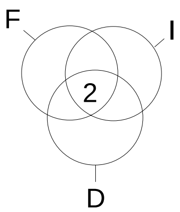
Drei Schüler belegen *F* und *I*,
sind also in beiden AG's.



Fünf Schüler belegen *F* und *D*

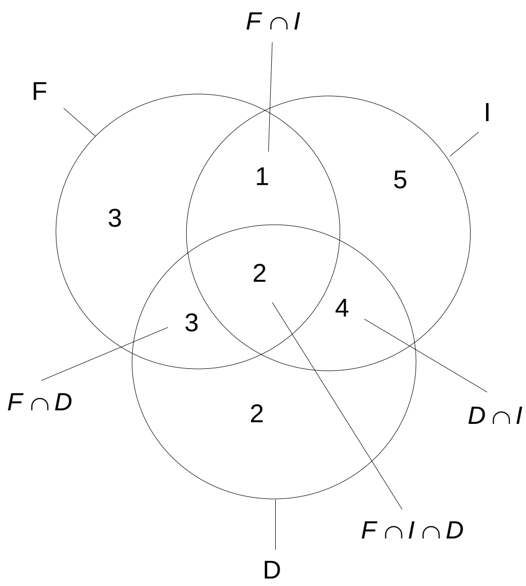


Sechs Schüler belegen *I* und *D*



Zwei Schüler belegen alle drei AG's
also *F*, *I* und *D*

Wie viele Schüler besuchen nur einen Kurs?

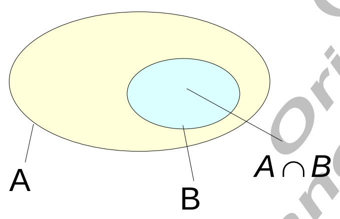


Zur Lösung dieser Aufgabe geht man von der Schnittmenge $F \cap I \cap D$ aus. $F \cap I$ hat drei Elemente, zwei sind bereits in $F \cap I \cap D$ enthalten, also muss noch ein Element in dem übrigen Bereich enthalten sein. :
Der übrige Bereich von $F \cap D$ muss dann drei und der von $I \cap D$ noch vier Elemente enthalten.

Über die gesamte Anzahl der Elemente in der Menge *F, I* und *D* lässt sich der verbleibende Rest in der Mengenschleife ermitteln.
Damit belegen 10 Schüler nur einen Kurs.

Mit Hilfe der Schnittmenge können bestimmte Strukturen innerhalb der Mengenlehre erkannt werden.

Satz	Wenn *B* eine Teilmenge von *A* ist, so ist die Schnittmenge von *A* und *B* gleich der Menge *B*.

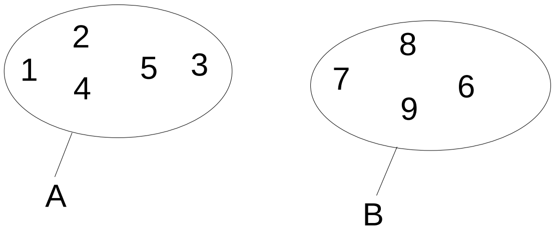


$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$

Diese Implikation lässt sich mit Hilfe der Mengendiagramme nachweisen.

Satz	Die Schnittmenge disjunkter (elementfremder) Mengen ist leer.

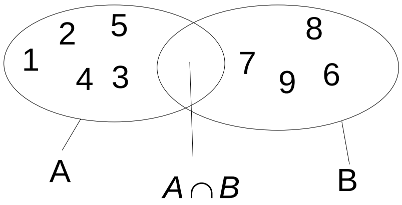
Bildet man die Schnittmenge zweier elementfremder (disjunkter) Mengen, so findet sich kein Element, dass sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten ist.
Diese Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge**.



$A \cap B = \{\ \}$

Das Kurzzeichen für die leere Menge wird mit dem Symbol $\varnothing$ gekennzeichnet.

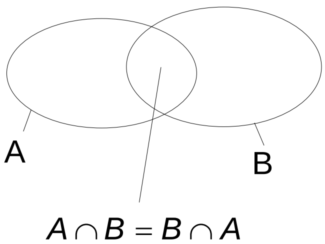
$\{\ \} = \varnothing$



Satz	Für die Schnittmengenbildung gilt das Kommutativgesetz.

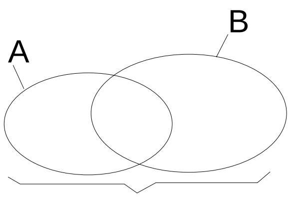
$A \cap B = B \cap A$

Der anschauliche Nachweis ist auch hier wieder über die Mengendiagramme ersichtlich.



Die Vereinigungsmenge

Definition	Die Vereinigungsmenge ist diejenige Menge, deren Elemente entweder in der einen Menge oder in der anderen Menge oder in beiden enthalten sind. $C=\{x \mid x\in A \;\vee\; x\in B\}$ Verknüpfungszeichen: $\cup$ $C=A\cup B$



$A\cup B=B\cup A$

Die Menge *C* ist die Menge *A* vereinigt mit der Menge *B.*

$V=\{x \mid x\in A \;\vee\; x\in B \;\vee\; x\in C \;...\}$

$V=A\cup B\cup C\cup ...$

Beispiel:

Gegeben sind die Mengen A und B in beschreibender Form.

$A=\{x \mid -4\le x\le 2\}_{\mathbb{Z}_-^*}$ $B=\{x \mid -3\le x\le 1\}_{\mathbb{Z}^*}$

Die Vereinigungsmenge soll ermittelt werden.

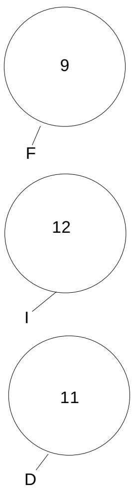
Die Mengen *A* und *B* in aufzählender Form:

$A=\{-4\,;-3\,;-2\,;-1\}$ $B=\{-1;-2\,;-1;\;1\}$

Die Vereinigungsmenge in aufzählender und beschreibender Form:

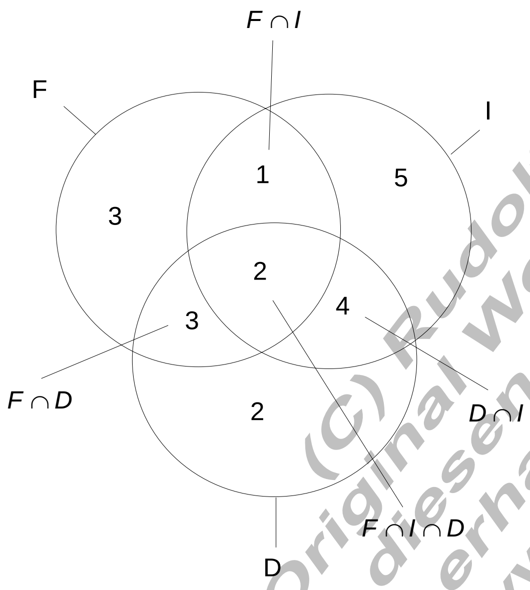
$A\cup B=\{-4\,;-3\,;-2\,;-1;1\}$ $A\cup B=\{x \mid -4\le x\le 1\}_{\mathbb{Z}^*}$

Beispiel:



Im vorangegangenem Beispiel zur Schnittmenge sind die Mengen *F*, *I* und *D* angegeben.
Es handelt sich dabei um Schüler, die die Kurse
Fotografie (*F*), Informatik (*I*) und Digitaltechnik (*D*)
belegen.

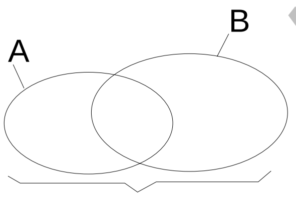
Welche Elemente enthält dann die Vereinigungsmenge dieser drei Mengen, und wie ist diese Menge entsprechend der Aufgabe zu beschreiben?



Die Vereinigungsmenge enthält 20 Elemente (Schüler) und zwar sind es alle Schüler der Klasse SF23S, die Kurse wählen konnten.

$F \cup I \cup D =$ { Schüler der Klasse TI11B }

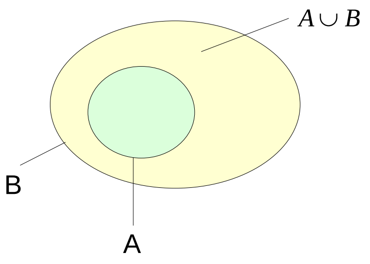
Satz	Ebenso wie die Schnittmengenbildung ist die Bildung der Vereinigungsmenge kommutativ.



$A \cup B = B \cup A$

Der Nachweis erfolgt über die Mengendiagramme.

Satz	Ist *A* Teilmenge von *B*, so ist die Vereinigungsmenge von *A* und *B* gleich der Menge *B*.



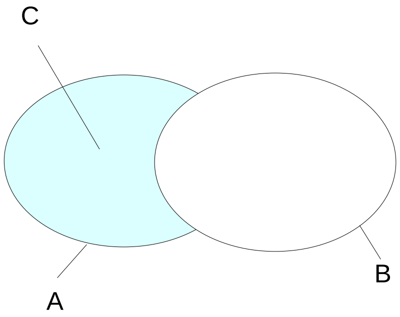
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Der Beweis erfolgt wieder über die Mengenbilder.

Die leere Menge zeigt sich bezüglich der Vereinigungsmengenbildung als neutrales Element, d.h. die Vereinigung mit der leeren Menge führt zu keiner Veränderung gegenüber der Ausgangsmenge.
$C \cup \{\} = C$

Die Restmenge

Definition	Die **Restmenge** *A* ohne *B* zweier Mengen *A* und *B* ist die Menge der Elemente, die in der Menge *A*, aber nicht in der Menge *B* enthalten sind.



Die Restmenge C ist die Menge A ohne die Elemente der Menge B.

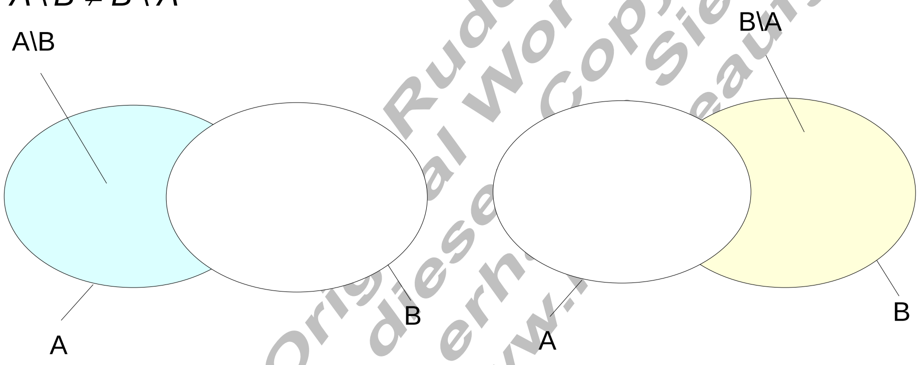
$C = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$

$C = A \setminus B$

Satz	Die Restmengenbildung ist nicht kommutativ.

Der direkte Beweis erfolgt über die Mengenbilder.

$A \setminus B \neq B \setminus A$



Beispiel:

$A = \{x \mid x = n^2 \wedge n < 4\}_{\mathbb{N}^*}$ $\quad B = \{x \mid x = 2n \wedge n < 4\}_{\mathbb{N}}$

$A = \{1\,;4\,;9\}$ $\quad B = \{0\,;2\,;4\,;6\}$

$A \setminus B = \{1\,;9\}$ $\quad B \setminus A = \{0\,;2\,;6\}$

Die Produktmengenverknüpfung

Definition	Eine Paarmenge ist eine Menge, deren Elemente aus Wertepaaren bestehen, deren Ordnung festgelegt ist.

Beispiel:

Paarmenge: $A = \{ (1|2) ; (3|5) ; (2|7) \}$

$(1|2) \in A$; $(3|5) \in A$; $(2|7) \in A$ aber $1 \notin A$; $(2|1) \notin A$

Der Begriff Ordnung bedeutet, es ist festgelegt, welche Komponente des Wertepaares an erster Stelle geschrieben wird.

$(1|2) \neq (2|1)$

Definition	Die Paarmenge (kartesisches Produkt) $A \times B$ der Mengen A und B ist die Menge aller möglichen geordneten Paare, mit der Ordnung $x \in A$ steht an erster Stelle und $y \in B$ steht an zweiter Stelle im Wertepaar. $P = A \times B = \{(x \mid y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

Die Produktmenge zweier Mengen ist nicht kommutativ, da die Ordnung in den Elementen der beiden Mengen verschieden ist.

Beispiel:

$A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{a; b\}$

$A \times B = \{(1|a); (1|b); (2|a); (2|b); (3|a); (3|b)\}$

$B \times A = \{(a|1); (a|2); (a|3); (b|1); (b|2); (b|3)\}$

Aus dem Beispiel sehen wir: $A \times B \neq B \times A$