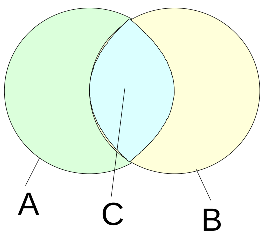
Mengenverknüpfungen

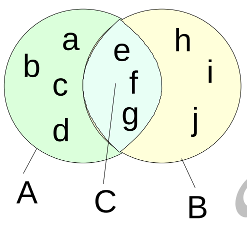
Durch Verknüpfungen von Mengen lassen sich andere Mengen bilden, die zu ihren Ausgangsmengen in bestimmten Beziehungen stehen. Dies ist in der Mathematik von Bedeutung, um Schreibweisen zu vereinfachen und das Erkennen von Strukturen zu erleichtern. Die wichtigsten Verknüpfungen sind Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Restmenge und Produktmenge.

Die Schnittmenge

Definition	Die **Schnittmenge** ist diejenige Menge, deren Elemente sowohl in der einen als auch in der anderen Ausgangsmenge enthalten sind. $C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Verknüpfungszeichen $\cap$ $C = A \cap B$

	Die Menge *C* ist die Schnittmenge von *A* und *B* oder kurz ausgedrückt, *C* ist gleich A geschnitten B Die Schnittmengenbildung ist nicht auf zwei Mengen beschränkt. $S = \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \wedge ...\}$ $S = A \cap B \cap C$

Beispiel:



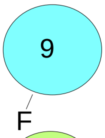
Gegeben sind die Mengen *A* und *B* mit
A = {*a;b;c;d;e;f;g*} und *B* = {*e;f;g;h;i;j*}
Die Schnittmenge soll ermittelt werden.

$C = A \cap B = \{e\,;f\,;g\}$

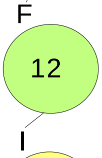
Die Elemente *e, f* und *g* sind sowohl in der Menge *A* als auch in der Menge *B* enthalten

Beispiel:

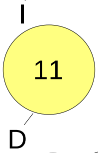
Die Schule bietet Kurse in Fotografie, Informatik und Digitaltechnik an, die die Schüler auf freiwilliger Basis besuchen können. Von der Klasse SF13S mit 20 Schülern wählen



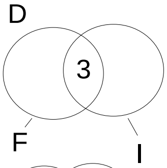
Neun Schüler den Fotokurs (*F*)



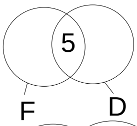
Zwölf Schüler den Informatikkurs (*I*)



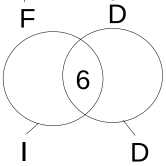
und
Elf Schüler den Digitalkurs (*D*)



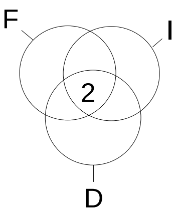
Drei Schüler belegen *F* und *I*,
sind also in beiden AG's.



Fünf Schüler belegen *F* und *D*

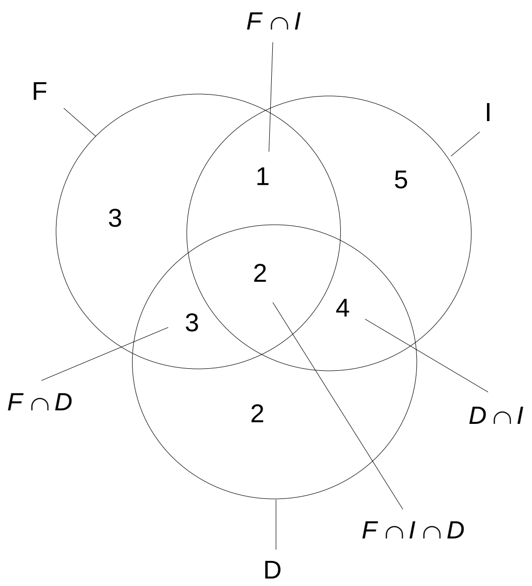


Sechs Schüler belegen *I* und *D*



Zwei Schüler belegen alle drei AG's
also *F*, *I* und *D*

Wie viele Schüler besuchen nur einen Kurs?

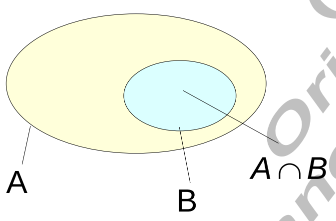


Zur Lösung dieser Aufgabe geht man von der Schnittmenge $F \cap I \cap D$ aus.
$F \cap I$ hat drei Elemente,
zwei sind bereits in
$F \cap I \cap D$ enthalten, also muss noch ein Element in dem übrigen Bereich enthalten sein.
Der übrige Bereich von
$F \cap D$ muss dann drei und der von
$I \cap D$ noch vier Elemente enthalten.

Über die gesamte Anzahl der Elemente in der Menge F, I und D lässt sich der verbleibende Rest in der Mengenschleife ermitteln.
Damit belegen 10 Schüler nur einen Kurs.

Mit Hilfe der Schnittmenge können bestimmte Strukturen innerhalb der Mengenlehre erkannt werden.

Satz	Wenn B eine Teilmenge von A ist, so ist die Schnittmenge von A und B gleich der Menge B.

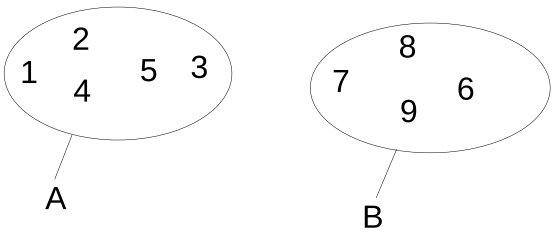


$$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$$

Diese Implikation lässt sich mit Hilfe der Mengendiagramme nachweisen.

Satz	Die Schnittmenge disjunkter (elementfremder) Mengen ist leer.

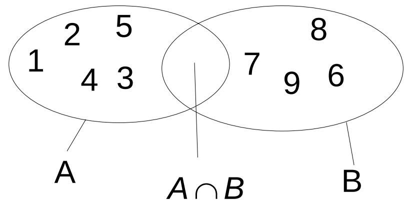
Bildet man die Schnittmenge zweier elementfremder (disjunkter) Mengen, so findet sich kein Element, dass sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten ist.
Diese Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge**.



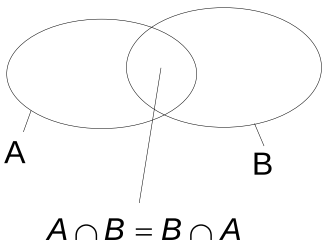
$A \cap B = \{\,\}$

Das Kurzzeichen für die leere Menge wird mit dem Symbol $\varnothing$ gekennzeichnet.

$\{\ \} = \varnothing$



Satz	Für die Schnittmengenbildung gilt das Kommutativgesetz.



$A \cap B = B \cap A$

Der anschauliche Nachweis ist auch hier wieder über die Mengendiagramme ersichtlich.