Mengenbegriff und Mengendarstellung

Definition	Eine **Menge**, ist die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener **Objekte** unserer Anschauung und unseres Denkens – welche **Elemente** der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Definition der Menge nach G. Cantor (1845 – 1918), deutscher Mathematiker

Der Mengenbegriff.

Dieser Mengenbegriff darf nicht mit dem umgangssprachlichen Begriff *Menge* im Sinne von *viel* verwechselt werden.

In der Definition bedeutet *bestimmte Objekte* dass genau entschieden werden muss, ob das Element zur Menge gehört.

Wohlunterschieden bedeutet, dass jedes Element nur einmal in der Menge enthalten ist, also nicht mehrere derselben Elemente in einer Menge vorhanden sein dürfen. Das mehrfach vorkommende Element wird nur einmal in der Menge aufgeführt. Eine Menge, die kein Element enthält, wird **leere Menge** genannt.
In den folgenden Ausführungen werden Begriffe und Eigenschaften von Mengen an Beispielen verdeutlicht, bei denen die Elemente der Mengen durch mathematische Kriterien beschrieben sind, also hauptsächlich Zahlenmengen.

Mengen werden dargestellt mit Hilfe der **Mengenklammern** in denen die Elemente aufgezählt werden oder in denen die Elemente beschrieben werden.

Eine andere Darstellung ist das Mengendiagramm (**Euler** – oder **Venn** – Diagramm). Dabei werden die Elemente in das Diagramm eingetragen.

Darstellung von Mengen.

Symbole für Mengen sind große Buchstaben, z.B.

A, B, M, ...

Symbole für Elemente sind z.B. kleine Buchstaben oder auch Zahlen

A, b, c, x, y, ...1, 2, 3, 99, ...

Mengenschreibweise in aufzählender Form: $A = \{a;b;c;d\}$

sprich: *A ist die Menge mit den Elementen a, b, c, d*

$a \in A$ sprich: a ist Element von A

$b \notin A$ sprich: b ist nicht Element von A

Die "Menge" $B = \{a\,;b\,;c\,;a\,;d\}$

ist keine Menge, da das Element a zweimal darin vorkommt.

Richtig ist: $B = \{a\,;b\,;c\,;d\}$

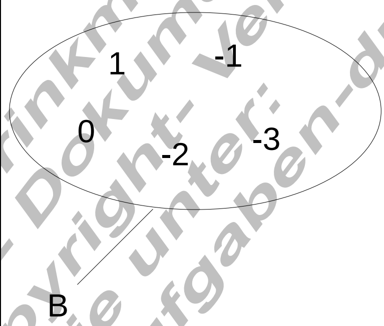
$C = \{\ \} = \varnothing$ heißt leere Menge, sie enthält kein Element.

Mengenschreibweise in **beschreibender Form**:

$B = \{\, x \mid -3 \le x \le 1 \wedge x \textit{ ist eine gerade Zahl } \}$

sprich: *B* ist die Menge aller Elemente *x*, für die gilt: *x* ist größer oder gleich –3 und kleiner oder gleich 1 und *x* ist eine ganze Zahl.

Darstellung einer Menge im **Mengendiagramm.**

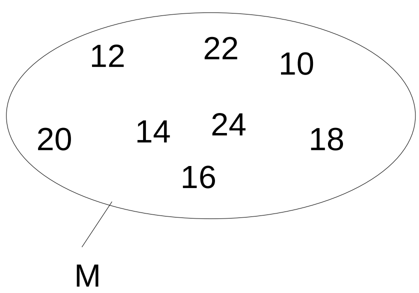


Beispiel: Die Menge *M* der geraden natürlichen Zahlen zwischen 9 und 25 soll in aufzählender und beschreibender Form – sowie im Mengendiagramm angegeben werden.

aufzählende Form: $M = \{\, 10\,;12\,;14\,;16\,;18\,;20\,;22\,;24 \,\}$

beschreibende Form: $M = \{\, x \mid 9 < x < 25 \wedge x = 2n \wedge n \text{ ist natürliche Zahl} \}$

Mengendiagramm:



Beispiel: Die Menge A ist in aufzählender Form geschrieben. Es soll eine beschreibende Form entwickelt werden.

$A = \{1; 4; 9; 16; 25\}$

Das ist die Menge der Quadratzahlen zwischen 1 und 25.

$A = \{ x \mid 1 \le x \le 25 \wedge x = n^2 \wedge n \text{ ist eine natürliche Zahl} \}$

Eigenschaften von Mengen

Durch die Angabe der Kriterien für die beschreibende Form von Mengen werden die Elemente der zu bestimmenden Menge aus einer umfangreicheren Menge ausgewählt.

Beispiel:
A ist die Menge aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und 10 und die Elemente sind Quadratzahlen.

$A = \{ x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl} \wedge 1 \le x \le 10 \wedge x \text{ ist eine Quadratzahl} \}$

B ist die Menge aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und 10.

$B = \{ x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl} \wedge 1 \le x \le 10 \}$

C ist die Menge der natürlichen Zahlen.

$C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$

In dieser Beschreibung treten drei Kriterien auf, die ausgehend von einer **Grundmenge**
(Menge C) über eine **Obermenge** (Menge B) zu der zu bestimmenden Menge A führen.

$C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\} \quad B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \quad A = \{1; 4; 9\}$

Bei der Betrachtung der Mengen A, B, C zeigen sich bereits bestimmte Eigenschaften von Mengen:
Die Menge der natürlichen Zahlen hat unendlich viele Elemente. Sie wird im Gegensatz zu den Mengen A und B, die endlich viele Elemente enthalten, als nicht endliche Menge bezeichnet.
Weiterhin ist erkennbar, dass alle Elemente von A in B und C enthalten sind und alle Elemente von B auch in C enthalten sind. Dieser Sachverhalt wird mit dem Begriff **Teilmenge** definiert.

Definition	Eine Menge A ist **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Symbol für Teilmenge: $\subset$

$A \subset B$ sprich: A ist Teilmenge von B

$A \subset B \Leftrightarrow$ für alle Elemente $x \in A$ gilt: $x \in B$

Entsprechend dem obigen Beispiel gilt also:

$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset B \subset C$

Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst (unechte Teilmenge)

$D = \{1;2;3\} \;\wedge\; E = \{1;2;3\} \Rightarrow D \subset E$

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge. $\{\,\} \subset E$

$A = \{x \mid 2 \le x \le 5\}_{\mathbb{N}} \quad A = \{2;3;4;5\}$

Der Index $\mathbb{N}$ bedeutet,

die Elemente der Menge entstammen der Grundmenge der natürlichen Zahlen.

Meist werden die Kriterien für Mengen so gewählt, dass ihre Elemente einer **Grundmenge** entnommen werden, also die zu bestimmende Menge Teilmenge der Grundmenge ist. Da diese Grundmengen in der Mathematik oft **Zahlenmengen** sind, wird die Schreibweise dadurch vereinfacht, dass die Grundmenge als Index der Mengenklammer hinzugeführt wird.

Vergleicht man zwei Mengen miteinander, so ist eine Ordnungsstruktur im Sinne von *größer* oder *kleiner als* nicht sinnvoll. Der Vergleich zweier Mengen kann sich daher nur auf andere Eigenschaften beziehen, so z. B. auf die Anzahl der Elemente. Diese Anzahl bezeichnet man als **Mächtigkeit** der Menge. Die Zahl selbst heißt **Kardinalzahl**.

$C = \{a;b;c\}$ $\qquad D = \{1;2;3;4\}$

Symbol für die Mächtigkeit bzw. Kardinalzahl card

card C = 3 $\qquad$ card D = 4

Definition	Zwei Mengen heißen **äquivalent**, wenn sie **gleichmächtig** sind.

$A = \{1;2;3\}$; card A = 3

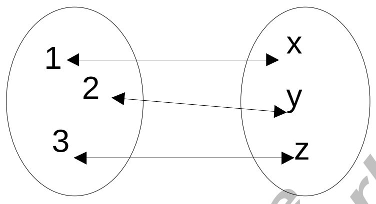
$B = \{x;y;z\}$; card B = 3

$A \sim B$ sprich : Die Menge A ist äquivalent der Menge B

Symbol für Äquivalenz: $\sim$

Die Äquivalenz zweier Mengen lässt sich durch Zuordnung der Elemente feststellen.

Merke	Zwei Mengen *A* und *B* sind äquivalent, wenn jedem Element von *A* genau ein Element von *B* zugeordnet werden kann und umgekehrt.

Beispiel für die Äquivalenz zweier unterschiedlicher Mengen.	

Um die Gleichheit von Mengen festzustellen, muss geprüft werden, ob die beiden Mengen dieselben Elemente enthalten.

Definition	Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten

Beispiel gleicher Mengen:

$A = \{u,v,w\} \quad B = \{u,v,w\}$ also A = B

Die Menge *A* ist gleich der Menge *B*, da sie dieselben Elemente enthält. Dabei ist die Reihenfolge der Elemente unerheblich.
Auch über die Teilmengenbezeichnung kann auf die Gleichheit von Mengen geschlossen werden.

Satz	Ist die Menge *A* Teilmenge der Menge *B* und die Menge *B* Teilmenge der Menge *A*, so ist die Menge *A* gleich der Menge *B*.

$$A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$$

Plausibilitätsbeweis:
A ist Teilmenge von *B*. Damit ist jedes Element von *A* auch Element von *B*.
B ist Teilmenge von *A*. Damit ist jedes Element von *B* auch Element von *A*.
Also sind beide Mengen gleich.

Entwicklung der Zahlenmengen

In der Mathematik werden die Rechenoperationen mit Hilfe von Zahlen definiert. Durch die Entwicklung der Rechenarten von der Addition bis hin zum Logarithmieren wurde die Unzulänglichkeit der Zahlenmenge offenbar, mit der gerade operiert wurde.
So bestand der zuerst bekannte Zahlenbereich aus Zahlen, die zum **Abzählen** benötigt wurden, also die positiven ganzen Zahlen, die als **natürliche Zahlen** bezeichnet werden.
In der Mengenlehre sind die Zahlen als Elemente von Zahlenmengen festgelegt, in den sogenannten **Standardmengen**.

Menge der natürlichen Zahlen.

Symbol: $\mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;...\}$ $\quad 0 \in \mathbb{N}$

Definition	Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthält die Zahlen, die zum Abzählen benötigt werden einschließlich der Zahl Null.

Die Definition ordnet das Element 0 der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu. Obwohl dies vom Begriff des Abzählens nicht direkt einzusehen ist, wird dadurch jedoch die Symbolik der Zahlengrundmengen vereinfacht. Aber auch die Schreibweise von Indizes an Koeffizienten beginnt meist mit 0.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Innerhalb der natürlichen Zahlen ist die Verknüpfung **Addition** abgeschlossen, d. h. die Addition zweier natürlicher Zahlen führt wieder zu einer natürlichen Zahl.

$$2 + 5 = 7 \quad a + b = c \quad a,b,c \in \mathbb{N}$$

Die Subtraktion ist in $\mathbb{N}$ nicht abgeschlossen, da nicht jede dieser Verknüpfungen wieder zu einem Element aus $\mathbb{N}$ führt.

$$5 - 8 = -3 \qquad -3 \notin \mathbb{N}$$

Die Zahlenmenge muss also so erweitert werden, dass die Verknüpfung **Subtraktion** uneingeschränkt möglich ist. Diese Zahlenmenge ist die **Menge der ganzen Zahlen**.

Definition	Die Menge der ganzen Zahlen enthält die Elemente der Menge der natürlichen Zahlen und alle negativen ganzen Zahlen.

Symbol $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

In $\mathbb{Z}$ sind die Verknüpfungen Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen.
Bei der Division zeigt sich jedoch wieder die Unzulänglichkeit dieser Zahlenmenge.

$6:7 = \frac{6}{7} \notin \mathbb{Z}$

Die Erweiterung der Menge der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen führt zur **Menge der rationalen Zahlen**, in der die **Division** nahezu uneingeschränkt möglich ist.
Die Division durch Null ist nicht erlaubt.

Definition	Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge aller Zahlen q, für die gilt: $\boxed{q = \frac{m}{n}}$ und m ist Element der Menge $\mathbb{Z}$ und n ist Element der Menge $\mathbb{Z}$ ohne das Element 0.

Symbol $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{m}{n} \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}^*\}$

Nach DIN 5473 werden die Standardmengen mit einem Stern gekennzeichnet, wenn das Element 0 nicht enthalten sein soll, also $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$.

Für jede rationale Zahl gibt es unendlich viele Schreibweisen, so dass in der aufzählenden Form der Menge nur die Repräsentanten (nicht mehr kürzbare Brüche) aufgeführt werden.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{6}{3} = \ldots. = \frac{64}{128} = \ldots$

Zusätzlich zu den rationalen Zahlen existieren auf dem Zahlenstrahl Punkte, die keiner rationalen Zahl entsprechen, also nicht durch

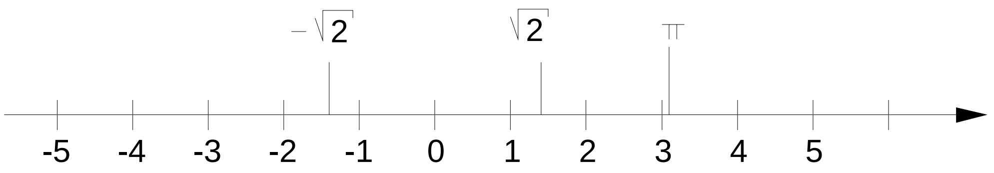
$q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}^*$

dargestellt werden können.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \pi \notin \mathbb{Q} \quad \sin(48^0) \notin \mathbb{Q} \quad \lg 2 \notin \mathbb{Q}$

Da diesen Zahlen wie den rationalen Zahlen wirklich ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet ist, nennt man alle Zahlen, denen genau ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet ist, die **Menge der reellen Zahlen**.

Definition	Die Menge der reellen Zahlen ist die Menge aller Punkte des Zahlenstrahls. Symbol $\mathbb{R}$



In der Menge der reellen Zahlen sind die Verknüpfungen Addition, Subtraktion Multiplikation, Potenzieren, uneingeschränkt und die Division ohne Divisor 0 möglich.

$\sqrt{-45} \notin \mathbb{R}$ $\log_2(-8) \notin \mathbb{R}$

Die Verknüpfungen Radizieren und Logarithmieren sind nicht uneingeschränkt möglich.

Diese Verknüpfungen sind in einer nochmals erweiterten Zahlenmenge abgeschlossen, der **Menge der komplexen Zahlen.**