# Verknüpfung von Aussagen

Werden Aussagen miteinander verknüpft, so entstehen zusammengesetzte Aussagen, deren Wahrheitsgehalt in der angegebenen Verbindung wieder überprüft werden kann.

## Die „Und“ – Verknüpfung (Konjunktion)

Eine Tresor ist durch zwei Schlösser gesichert.
Wie bekommen wir ihn auf? Welche Bedingung muss erfüllt sein?
Die Tresortür lässt sich nur öffnen, wenn beide Schlösser geöffnet werden.
Bedingung: Schloss 1 **und** Schloss 2 müssen geöffnet sein.

| | |
|---|---|
| **Konjunktion** | Sind zwei Aussagen $A_1$ und $A_2$ so miteinander verknüpft, dass die zusammengesetzte Aussage nur dann wahr ist, wenn sowohl $A_1$ als auch $A_2$ wahr ist, so heißt diese Verknüpfung **Konjunktion.**<br><br>Verknüpfungszeichen und: $\wedge$ (logisch und) |

Beispiel:

$A:$ Duisburg liegt am Rhein. $w(A) = W$
$B:$ Hamburg liegt an der Elbe. $w(B) = W$
$C = A \wedge B:$
Duisburg liegt am Rhein $\wedge$ Hamburg liegt an der Elbe. $w(C) = W$

$X:$ Alle Autos haben Räder. $w(X) = W$
$Y:$ Alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos. $w(Y) = F$
$Z = X \wedge Y:$
Alle Autos haben Räder $\wedge$ alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos. $w(Z) = F$

Beispiel:

$A_1:$ 4 ist eine gerade Zahl $A_2: 4 > 2 \Rightarrow$ $w(A_1) = W$ $w(A_2) = W$
Verknüpfung: $A_1$ und $A_2$
$A_{12}:$ 4 ist eine gerade Zahl und $4 > 2 \Rightarrow$ $w(A_{12}) = W$

Beispiel:

Wahrheitstafel

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \wedge A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | F |
| F | F | F |

$A_1(x): x - 3 = 5$ $A_2(x): x < 10$
für $x = 9$ gilt:
$A_1: 9 - 3 = 5$ $A_2: 9 < 10 \Rightarrow w(A_1) = F$ $w(A_2) = W$
Verknüpfung:
$A_{12} := A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_{12}: 9 - 3 = 5 \wedge 9 < 10$
$\Rightarrow w(A_{12}) = \underline{\underline{F}}$

| | |
|---|---|
| Merke | Die Konjunktion zweier Aussagen $A_1$ und $A_2$ ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. |

Übung:
Geben Sie den Wahrheitsgehalt der Konjunktion an:
a) A: München liegt an der Isar und Köln liegt am Rhein.
b) B: Heute ist Montag und die Sonne scheint.
c) C: Manchmal regnet es und manche Schüler lieben Mathematik.
d) D: 4 ist eine gerade Zahl und größer als 7.

Lösung :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $w(A) = W$ | b) $w(B) = W$ oder F | c) $w(C) = W$ | d) $w(D) = F$ |

Die „Oder“ – Verknüpfung (Disjunktion)

Der Tresor ist für Unbefugte schon dann nicht zu öffnen, wenn eins der beiden Schlösser geschlossen ist, also Schloss 1 oder Schloss 2.
Beide Schlösser erhöhen die Sicherheit.

| | |
|---|---|
| **Disjunktion** | Sind zwei Aussagen $A_1$ und $A_2$ so miteinander verknüpft, dass die zusammengesetzte Aussage immer dann wahr ist, wenn **entweder** die eine **oder** die andere **oder** beide Aussagen wahr sind, so heißt diese Verknüpfung **Disjunktion**<br><br>Verknüpfungszeichen oder: $\vee$ (logisch oder) |

Beispiel:
$A:$ Duisburg liegt am Rhein. $w(A) = W$
$B:$ Hamburg liegt an der Mosel. $w(B) = F$
$C = A \vee B:$
Duisburg liegt am Rhein $\vee$ Hamburg liegt an der Mosel. $w(C) = W$

$X:$ Alle Autos haben Räder. $w(X) = W$
$Y:$ Alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos. $w(Y) = F$
$Z = X \vee Y:$
Alle Autos haben Räder $\vee$ alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos. $w(Z) = W$

Beispiel:

Wahrheitstafel

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \vee A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | W |
| F | W | W |
| F | F | F |

$A_1(x): 2x = 14 \quad A_2(x): x \geq 8$
für $x = 7$ gilt:
$A_1: 2 \cdot 7 = 14 \quad A_2: 7 \geq 8 \Rightarrow w(A_1) = W \quad w(A_2) = F$
Verknüpfung:
$A_{12} := A_1 \vee A_2 \Rightarrow A_{12}: 2 \cdot 7 = 14 \vee 7 \geq 8$
$\Rightarrow w(A_{12}) = \underline{\underline{W}}$

| | |
|---|---|
| Merke | Die Disjunktion zweier Aussagen $A_1$ und $A_2$ ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. |

Übung:
Geben Sie den Wahrheitsgehalt der Disjunktion an:
a) A: München liegt an der Isar oder Köln liegt am Rhein.
b) B: Heute ist Montag oder die Sonne scheint.
c) C: Heute regnet es oder manche Schüler lieben Mathematik.
d) D: 4 ist eine gerade Zahl oder größer als 7.

Lösung :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $w(A) = W$ | b) $w(B) = W$ oder F | c) $w(C) = W$ | d) $w(D) = W$ |

## Die Implikation

Verknüpfungszeichen wenn ... dann $\rightarrow$

**Implikation**

Sind zwei Aussagen $A_1$ und $A_2$ so miteinander verknüpft, dass aus der Aussage $A_1$ die Aussage $A_2$ **logisch folgt**, so heißt diese Verknüpfung **Implikation.**

Wahrheitstafel

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \rightarrow A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | W |
| F | F | W |

| | |
|---|---|
| Merke | Die Implikation zweier Aussagen $A_1$ und $A_2$ ist genau dann falsch, wenn $A_1$ wahr und $A_2$ falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie wahr. |

## Die Äquivalenz

Verknüpfungszeichen genau dann ... wenn $\Leftrightarrow$

**Bijunktion**

Die wechselseitige Implikation heißt **Bijunktion** oder **Äquivalenz**

Wahrheitstafel

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \Leftrightarrow A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | F |
| F | F | W |

Die Wahrheitstafel entspricht der Implikation, dabei können die Aussagen $A_1$ und $A_2$ jedoch vertauscht werden. Die Verknüpfung der beiden Aussagen über die Äquivalenz führt genau dann zu einer wahren Aussage, wenn der Wahrheitsgehalt beider Aussagen gleich (äquivalent) ist.

Beispiel:
Ein mathematischer Satz lautet:
Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar,
so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.
$A_1$: Die Quersumme der Zahl x ist durch 3 teilbar
$A_2$: Die Zahl x ist durch 3 teilbar
x = 39 Quersumme = 12   3 | 12 und 3 | 39
$A_1$: Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar
$\Rightarrow A_2$ :  Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar
$A_2$ :  Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar
$\Rightarrow A_1$ :  Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar
$A_1$ :  Die Quersumme der Zahl 39 ist durch 3 teilbar
$\Leftrightarrow A_2$ :  Die Zahl 39 ist durch 3 teilbar

Die Negation

Verknüpfungszeichen nicht  $\neg$

| | |
|---|---|
| **Negation** | Die Negation einer Aussage ist immer dann wahr, wenn die Aussage falsch ist, und immer dann falsch, wenn die Aussage wahr ist |

Wahrheitstafel

| w(A) | w(¬A) |
|---|---|
| W | F |
| F | W |

$A$ :  5 ist eine ungerade Zahl $\Rightarrow$ $w(A) = W$

$\neg A$ :  5 ist keine ungerade Zahl $\Rightarrow$ $w(A) = F$

| | |
|---|---|
| Satz | Die doppelte Negation einer Aussage führt wieder zur ursprünglichen Aussage |

Beispiel:
$A$ :  Der Schüler ist fähig die Aufgabe zu lösen
$\neg A$ :  Der Schüler ist unfähig die Aufgabe zu lösen
$\neg(\neg A)$ : Der Schüler ist nicht unfähig die Aufgabe zu lösen

## Zusammenfassung:

### Konjunktion

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \wedge A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | F |
| F | F | F |

### Disjunktion

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \vee A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | W |
| F | W | W |
| F | F | F |

### Implikation

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \rightarrow A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | W |
| F | F | W |

### Äquivalenz

| $w(A_1)$ | $w(A_2)$ | $w(A_1 \Leftrightarrow A_2)$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | F |
| F | F | W |

### Negation

| $w(A)$ | $w(\neg A)$ |
|---|---|
| W | F |
| F | W |