Bruchgleichungen

Bruchgleichungen lassen sich genau wie auch lineare Gleichungen durch Äquivalenzumformungen lösen. Zuvor ist jedoch immer erst die Definitionsmenge zu bestimmen. Die Grundmenge ist, falls nichts anderes angegeben wird IR.
Die Definitionsmenge enthält also die Variabelenwerte, für die die Gleichung gültig ist. Zur Bestimmung der Definitionsmenge ist zu untersuchen, für welche Variabelenwerte der Nenner Null wird. Zu bestimmen sind also die Nennernullstellen. Genau diese Werte gehören <u>nicht</u> zur Definitionsmenge.

Beispiel:

$\frac{4+x}{x-2} = 6 \quad \Rightarrow$ Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

denn für $x = 2$ wird der Nenner Null.

$$
\begin{array}{llll}
 & \frac{4+x}{x-2} & = 6 & | \cdot (x-2) \\
\Leftrightarrow & 4+x & = 6 \cdot (x-2) & \\
\Leftrightarrow & 4+x & = 6x-12 & | -6x \\
\Leftrightarrow & 4-5x & = -12 & | -4 \\
\Leftrightarrow & -5x & = -16 & | :(-5) \\
\Leftrightarrow & x & = \frac{16}{5} & \text{da } x \in D \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{\frac{16}{5}\right\}}}
\end{array}
$$

Beispiel:

$\frac{5}{x+3} + \frac{1}{x-1} = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$

denn für $x = -3$ wird der 1. Nenner, für $x = 1$ der 2. Nenner Null.

Hauptnenner: $(x+3)(x-1)$

$$
\begin{array}{llll}
 & \frac{5(x-1)}{(x+3)(x-1)} + \frac{1(x+3)}{(x+3)(x-1)} & = 0 & | \cdot (x+3)(x-1) \\
\Leftrightarrow & 5(x-1) + (x+3) & = 0 & \\
\Leftrightarrow & 5x-5+x+3 & = 0 & \\
\Leftrightarrow & 6x-2 & = 0 & | +2 \\
\Leftrightarrow & 6x & = 2 & | :6 \\
\Leftrightarrow & x & = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} & \text{da } x \in D \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{\frac{1}{3}\right\}}}
\end{array}
$$

Beispiel:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{4}{x-1}=\frac{x}{x-1} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\} \qquad \text{Hauptnenner: } (x+1)(x-1)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)} &&= \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} && |\cdot(x-1)(x+1)\\
\Leftrightarrow\ & x^2-x+4x+4 &&= x^2+x &&\\
\Leftrightarrow\ & 3x+4 &&= x && -x\\
\Leftrightarrow\ & 2x+4 &&= 0 && |-4\\
\Leftrightarrow\ & 2x &&= -4 && |:2\\
\Leftrightarrow\ & x &&= -2 && \text{da } x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2\}}}
\end{aligned}$$

Nachdem beide Seiten der Gleichung auf den Hauptnenner gebracht wurden, führt die anschließende Multiplikation mit dem Hauptnenner dazu, dass keine Brüche mehr vorhanden sind.

Beispiel:

$$\frac{a-x}{b-x}-\frac{a-b}{a+b}=0 \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{x=b\}\,;\,a+b\neq 0 \qquad \text{Hauptnenner: } (b-x)(a+b)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(a-x)(a+b)}{(b-x)(a+b)}-\frac{(a-b)(b-x)}{(a+b)(b-x)} &&= 0 && |\cdot(b-x)(a+b)\\
\Leftrightarrow\ & (a-x)(a+b)-(a-b)(b-x) &&= 0 &&\\
\Leftrightarrow\ & a^2+ab-ax-bx-\left[ab-ax-b^2+bx\right] &&= 0 &&\\
\Leftrightarrow\ & a^2+\cancel{ab}-\cancel{ax}-bx-\cancel{ab}+\cancel{ax}+b^2-bx &&= 0 &&\\
\Leftrightarrow\ & a^2-2bx+b^2 &&= 0 && |-a^2-b^2\\
\Leftrightarrow\ & -2bx &&= -a^2-b^2 && |:(-2b)\\
\Leftrightarrow\ & x &&= \frac{a^2+b^2}{2b} && \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\frac{a^2+b^2}{2b}\right\};\,b\neq 0}}
\end{aligned}$$

Besteht die rechte Seite der Gleichung nur aus dem Wert Null, so bringt man die linke Seite auf den Hauptnenner. Die Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auch hier dazu, dass keine Brüche mehr vorhanden sind. Zu berücksichtigen ist aber, dass der Bruchstrich eine Klammer ersetzt. Steht vor einem Bruch ein Minuszeichen, so ist nach Wegfall der Brüche der entsprechende Zählerterm in eine Minusklammer zu setzen.

Der Trick mit der Kehrwertbildung:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x-2} \quad |\text{Kehrwertbildung } D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{x+1}{2}=\frac{x-2}{4} \qquad HN=4\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2x+2}{4}=\frac{x-2}{4} \quad |\cdot 4\\
\Leftrightarrow\ & 2x+2=x-2 \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-4\}\in D}}
\end{aligned}$$

In manchen Fällen kann die Berechnung durch eine Kehrwertbildung vereinfacht werden.

Das gilt insbesondere dann, wenn die Zähler der Brüche nur aus Zahlen bestehen.

Der Trick mit der Multiplikation über Kreuz:

$$\frac{4}{x+2}=\frac{3}{5x-4}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2;\frac{4}{5}\right\}$$

$$\frac{4}{x+2}=\frac{3}{5x-4}\,|\text{Multiplikation über Kreuz}$$

$$\Leftrightarrow 4(5x-4)=3(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 20x-16=3x+6\,|-3x+16$$

$$\Leftrightarrow 17x=22\,|\,17\Leftrightarrow x=\frac{22}{17}$$

$$\Rightarrow L=\left\{\frac{22}{17}\right\}$$

Die Berechnung kann durch eine kreuzweise Multiplikation ebenfalls verkürzt werden.

Dabei wird der Nenner des ersten Bruchs mit dem Zähler des zweiten multipliziert und der Nenner des zweiten mit dem Zähler des ersten.

Das ist aber nur dann möglich, wenn die Bruchgleichung die nebenstehende Form besitzt.

Simpler Beweis für die Gültigkeit der Kehrwertbildung.

$$\text{Behauptung}: \frac{2}{x+1}=\frac{4}{x-2}\Leftrightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{x-2}{4}$$

Der Nachweis erfolgt durch einfache Äquivalenzumformungen.

$$\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x-2}\,|\cdot(x+1)\Leftrightarrow 2=\frac{4(x+1)}{x-2}\,|\cdot(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)=4(x+1)\,|:8\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x-2)=\frac{1}{2}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{x+1}{2}\Leftrightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{x-2}{4}\quad\text{q.e.d (was zu beweisen war)}$$

Beispiel:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0\quad\Rightarrow\text{Definitionsmenge: }D=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0\,|-\frac{2}{x-2}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=-\frac{2}{x-2}\,|\text{ Kehrwertbildung}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{x-2}{2}\,|\cdot 2\Leftrightarrow 2x=-(x-2)\Leftrightarrow 2x=-x+2\,|+x$$

$$\Leftrightarrow 3x=2\,|:3\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\text{ da }x\in D\Rightarrow L=\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

Beispiel:

$\frac{x^2+4x+3}{x+3} = x-2 \quad \Rightarrow$ Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Hauptnenner : $x+3$

$\frac{x^2+4x+3}{x+3} = \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} \mid \cdot (x+3)$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3 = x^2+3x-2x-6 \Leftrightarrow x^2+4x+3 = x^2+x-6 \mid -x^2$

$\Leftrightarrow 4x+3 = x-6 \mid -x \Leftrightarrow 3x+3 = -6 \mid -3$

$\Leftrightarrow 3x = -9 \mid :3 \Leftrightarrow x = -3$ da $x \notin D \Rightarrow \underline{\underline{L = \{\ \}}}$

Dieses Beispiel zeigt, wie wichtig es ist die Definitionsmenge zu bestimmen.
Die Äquivalenzumformung führt zwar zu einem Ergebnis, doch die Ausgangsgleichung ist für diesen Wert nicht definiert.

Beispiel:

$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-2x}{1-x^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

Trick : $\frac{1-2x}{1-x^2} = -\frac{1-2x}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$

damit ist der HN : $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ 3. binomische Formel

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{(x-1)(x-1)}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1}} = \frac{2x-1}{x^2-1} \mid \cdot (x^2-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - \underbrace{(x-1)(x-1)}_{\text{2. binomische Formel}} = 2x-1 \Leftrightarrow x^2 - (x^2-2x+1) = 2x-1$

$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2x-1 \Leftrightarrow 2x-1 = 2x-1$

Diese Gleichung wird für jedes $x \in D$ erfüllt $\Rightarrow \underline{\underline{L = D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}}}$

Diese Gleichung hat unendlich viele Losungen, denn die Gleichheitsbedingung ist für jedes x der Definitionsmenge erfüllt.