Algebraische Begriffe

Summe von a und b	$a+b$	***Differenz*** von a und b	$a-b$
Produkt	$3\cdot x = x+x+x$	***Potenz***	$x^3 = x\cdot x\cdot x$
Quotient (Bruch) a: Zähler b: Nenner	$\frac{a}{b}\quad b\neq 0$	***Kehrwert*** von a:	$\frac{1}{a}\quad a\neq 0$

Rechnen mit Summen und Differenzen

1. $32x+12y-4x-5y-14x+2y$
$=32x-4x-14x+12y-5y+2y$
$=\underline{\underline{14x+9y}}$

Gleichartige Summanden werden zusammengefasst.

2. $3a+(4a-2b)-8(b-a)$
$=3a+4a-2b-8b+8a$
$=\underline{\underline{15a-10b}}$

Das Rechenzeichen vor der Klammer ist zu beachten.

3. $3(2x-4y)-4(3-4x-2y)$
$=6x-12y-12+16x+8y$
$=\underline{\underline{22x-4y-12}}$

Jedes Glied der Summe wird mit dem Faktor multipliziert.

4. $8xy\cdot(-3x)=8\cdot(-3)\cdot x\cdot x\cdot y$
$=\underline{\underline{-24x^2y}}$

Faktoren dürfen vertauscht werden.

5. $9a-\left[5a-\left(b-8a\right)\right]=9a-\left[5a-b+8a\right]$
$=9a-5a+b-8a=\underline{\underline{-4a+b}}$

Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

Rechnen mit Brüchen

Gleichnamige Brüche addieren heißt, Zähler addieren und Nenner beibehalten.

a) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\underline{\underline{\frac{7}{5}}}$ b) $\frac{x}{3}-\frac{2x}{3}=\frac{x-2x}{3}=\underline{\underline{-\frac{x}{3}}}$

Ungleichnamige Brüche werden gleichnamig gemacht und dann addiert.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\underline{\underline{\frac{11}{10}}}$ b) $\frac{x}{4}+\frac{3x}{2}=\frac{x}{4}+\frac{6x}{4}=\frac{7x}{4}=\underline{\underline{\frac{7}{4}x}}$

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

a) $\frac{4}{7}\cdot 3=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{1}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 1}=\underline{\underline{\frac{12}{7}}}$ b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{5}=\frac{3\cdot x}{4\cdot 5}=\frac{3x}{20}=\underline{\underline{\frac{3}{20}x}}$

c) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}=\underline{\underline{\frac{x}{2}}}$ d) $\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{12}=\underline{\underline{\frac{x^2}{36}}}$

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert

$$\frac{3}{8}:\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$\frac{\frac{3a}{8b}}{\frac{9c}{2b}}=\frac{3a}{8b}:\frac{9c}{2b}=\frac{3a\cdot 2b}{8b\cdot 9c}=\frac{a}{4\cdot 3c}=\underline{\underline{\frac{a}{12c}}}$$

Einige Beispiele zur Bruchdivision

1. a) $\frac{\frac{2}{5}}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{2}{15}}}$ b) $\frac{\frac{3}{7}}{t}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{t}=\underline{\underline{\frac{3}{7t}}}$ c) $\frac{1}{\frac{3}{8}}=\underline{\underline{\frac{8}{3}}}$

2. a) $\frac{1}{\frac{t}{4}}=\underline{\underline{\frac{4}{t}}}$ b) $\frac{1}{\frac{t}{2}+1}=\frac{1}{\frac{t+2}{2}}=\underline{\underline{\frac{2}{t+2}}}$ c) $\frac{-1+8t}{8}=\underline{\underline{-\frac{1}{8}+t}}$

3. a) $\frac{-4}{2}=-\frac{4}{2}=\frac{4}{-2}=\underline{\underline{-2}}$ b) $\frac{-x}{-a}=\underline{\underline{\frac{x}{a}}}$

Beachten Sie: $\frac{0}{3}=0$ aber $\frac{3}{0}$ ist nicht definiert.

Variable	In der Mathematik werden Buchstaben, die als Platzhalter für Zahlen benutzt werden, ***Variable*** genannt. Da man für diese Buchstaben je nach Situation verschiedene Zahlen einsetzen kann, werden Variable auch Veränderliche genannt.

Terme	Ausdrücke, in denen Variable und/oder Zahlen mit Rechenzeichen verbunden werden, heißen ***Terme***. ***Der Wert eines Terms*** ergibt sich dann, wenn man für jede Variable eine Zahl einsetzt.

Beispiel: Term: $x+5$ Variable: x

Wert des Terms bei z.B $x=2: x+5=2+5=\underline{\underline{7}}$

Term: $x\cdot(x+y)$ Variable: x ; y

Wert des Terms bei z.B $x=5$ und $y=1$:

$x\cdot(x+y)=5\cdot(5+1)=5\cdot 6=\underline{\underline{30}}$

Termvereinfachung durch ausklammern

Man zerlegt alle Summanden in Faktoren.
Dann wird der größte gemeinsame Faktor ausgeklammert.

Beispiel

$27x - 27 = 27x - 27 \cdot 1 = \underline{\underline{27(x-1)}}$ $\qquad 8x + 24 = 8x + 8 \cdot 3 = \underline{\underline{8(x+3)}}$

$15x + 9y - 21 = 3 \cdot 5x + 3 \cdot 3y - 3 \cdot 7 = \underline{\underline{3(5x + 3y - 7)}}$

Probe durch ausmultiplizieren: $3(5x + 3y - 7) = 15x + 9y - 21$

Wird ein negativer Faktor ausgeklammert, so sind die Vorzeichenregeln zu beachten.

Beispiele:

a) $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x - 3 = -\frac{6}{8}x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{24}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}(6x^2 - 5x + 24)}}$

b) $-\frac{3}{5} - x + \frac{8}{5}y = -\frac{3}{5} - \frac{5}{5}x + \frac{8}{5}y = \underline{\underline{-\frac{1}{5}(3 + 5x - 8y)}}$

Ausklammern macht aus einer Summe ein Produkt,
dieser Vorgang wird auch ***faktorisieren*** genannt.

Beispiele:

1.) $ab + ac + mb + mc = a(b + c) + m(b + c) = \underline{\underline{(b + c)(a + m)}}$

2.) $-6am + 12an - 2ap + 3bm - 6bn + bp$

$= -2a(3m - 6n + p) + b(3m - 6n + p)$

$= \underline{\underline{(3m - 6n + p)(b - 2a)}}$

Multiplikation von Summen

Ausmultiplizieren heißt, jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multiplizieren.

$(x-2)(x-5) = x^2 - 5x - 2x + 10 = \underline{\underline{x^2 - 7x + 10}}$

Beispiele:

1.) $(2x - 3)(1 - tx) = 2x - 2tx^2 - 3 + 3tx = \underline{\underline{-2tx^2 + 3tx + 2x - 3}}$

2.) $(x - 2)(x - 3)(2x + 1) = (x^2 - 5x + 6)(2x + 1)$

$= 2x^3 + x^2 - 10x^2 - 5x + 12x + 6 = \underline{\underline{2x^3 - 9x^2 + 7x + 6}}$

Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele:

1.) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2x\cdot 1 + 1 = \underline{\underline{4x^2+4x+1}}$

2.) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3x + 9 = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9}}$

3.) $\left(u-\frac{1}{2}v\right)\left(u+\frac{1}{2}v\right) = \underline{\underline{u^2 - \frac{1}{4}v^2}}$

Bruchterme

1. Für welche x - Werte ist der Bruchterm $\frac{3x-3}{2(1-x)}$ definiert?

Lösung:
Beachten Sie: Durch die Zahl Null darf nicht dividiert werden.
Der Term ist definiert für alle reellen Zahlen außer für x = 1,
die Definitionsmenge für diesen Term ist also: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
Der Term lässt sich für $x \neq 1$ umformen:

$$\frac{3x-3}{2(1-x)} = \frac{3(x-1)}{2(1-x)} = \frac{3(x-1)}{-2(x-1)} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

2. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D

und vereinfachen Sie den Term $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

Lösung: Zuerst den Nenner faktorisieren: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
Für $x = 2$ oder für $x = -2$ würde der Nenner zu Null werden.
$\Rightarrow$ Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \underline{\underline{\frac{(x+2)}{(x-2)}}}$$

3. Bestimmen Sie D und vereinfachen Sie $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{2x-6}$

$x=3$ macht beide Nenner zu Null $\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{2x-6}=\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{2(x-3)}=\frac{2(x-2)-(x+2)}{2(x-3)}=\underline{\underline{\frac{x-6}{2x-6}}}$$

4. Bestimmen Sie D und vereinfachen Sie $\frac{2x-4}{x}-\frac{8x}{4x-8}$

Die Nennernullstellen sind: $x=0 \quad \vee \quad x=2 \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\,;2\}$

$$\frac{2x-4}{x}-\frac{8x}{4x-8}=\frac{2x-4}{x}-\frac{8x}{4(x-2)}=\frac{4(x-2)(2x-4)-8x^2}{4x(x-2)}$$

$$=\frac{8x^2-16x-16x+32-8x^2}{4x(x-2)}=\frac{-32x+32}{4x(x-2)}=\frac{-32(x-1)}{4x(x-2)}=\underline{\underline{\frac{-8(x-1)}{x(x-2)}}}$$