

SB13Z Klassenarbeit Mathematik vom 08.3.05**Lösungen**

zu 1 a)

Das Gleichungssystem:

$$P_1(-2|-6): f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -6$$

$$P_2(-1|2): f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 2$$

$$P_3(2|-4): f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_4(3|-6): f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -6$$

Lösung mit dem Gauss – Algorithmus

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	-2	4	-8	-6	Bestimmen der Koeffizienten:
1	-1	4	-1	2 II - I	$4a_2 = -8 : 4 \Leftrightarrow a_2 = \frac{-8}{4} = \underline{\underline{-2}}$
1	2	4	8	-4 III - I	$3a_2 - 3a_3 = -7,5 \Leftrightarrow 3 \cdot (-2) - 3a_3 = -7,5 \Leftrightarrow -6 - 3a_3 = -7,5 + 6$
1	3	9	27	-6 IV - I	$\Leftrightarrow -3a_3 = -7,5 + 6 = -1,5 : (-3) \Leftrightarrow a_3 = \frac{-1,5}{-3} = 0,5 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$
1	-2	4	-8	-6	
0	1	-3	7	8	$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 8 \Leftrightarrow a_1 - 3 \cdot (-2) + 7 \cdot \frac{1}{2} = 8 \Leftrightarrow a_1 + 6 + 3,5 = 8$
0	4	0	16	2 : 4	
0	5	5	35	0 : 5	
1	-2	4	-8	-6	$\Leftrightarrow a_1 + 9,5 = 8 -9,5 \Leftrightarrow a_1 = 8 - 9,5 = -1,5 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$
0	1	-3	7	8	
0	1	0	4	0,5 III - II	$a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = -6 \Leftrightarrow a_0 - 2 \cdot (-1,5) + 4 \cdot (-2) - 8 \cdot 0,5 = -6$
0	1	1	7	0 IV - II	$\Leftrightarrow a_0 + 3 - 8 - 4 = -6 \Leftrightarrow a_0 - 9 = -6 + 9$
1	-2	4	-8	-6	$\Leftrightarrow a_0 = -6 + 9 = \underline{\underline{3}}$
0	1	-3	7	8	
0	0	3	-3	-7,5	Funktionsgleichung: $f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 3}}$
0	0	4	0	-8	

zu 1b)

Berechnung der lokalen Extremwerte:

Die Funktion mit ihren Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{3}{2}; \quad f''(x) = 3x - 4; \quad f'''(x) = 3$$

Notwendige Bedingung für Extremwerte:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{3}{2} = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung. Um sie mit der p - q - Formel zu lösen, muss sie erst auf die Normalform gebracht werden.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{3}{2} = 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \mid : 3 \Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0 \text{ (Normalform)}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{8}{3}; \text{ bzw. } \frac{p}{2} = -\frac{4}{3}; q = -1$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{16}{9} + \frac{9}{9} = \frac{25}{9}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 &= \frac{4}{3} - \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von Extremwerten ist:
 $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung werden in die 2. Ableitung eingesetzt:

$$x_1 = 3 \Rightarrow f''(3) = 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0 \Rightarrow \underline{\text{rel min}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 4 = -1 - 4 = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\text{rel max}}$$

Um nun die zugehörigen y - Koordinaten zu erhalten, werden die Lösungen der quadratischen Gleichung in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} x_1 = 3 \Rightarrow f(3) &= \frac{1}{2} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 - \frac{3}{2} \cdot 3 + 3 \\ &= \frac{27}{2} - 18 - \frac{9}{2} + 3 = \frac{27}{2} - \frac{36}{2} - \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = -\frac{12}{2} = -6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{\min}(3 \mid -6)}}$$

$$\begin{aligned} x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \\ &= -\frac{1}{54} - \frac{2}{9} + \frac{3}{6} + 3 = -\frac{1}{54} - \frac{12}{54} + \frac{27}{54} + \frac{162}{54} = \frac{176}{54} = \frac{88}{27} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{\max}\left(-\frac{1}{3} \mid \frac{88}{27}\right) \approx (-0,3 \mid 3,26)}}$$

zu c)

Berechnung des Wendepunktes:

Notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von Wendepunkten ist:

$$f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \text{ (2. Bedingung ist mit } f'''(x) = 3 \text{ erfüllt)}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0$$

$$3x - 4 = 0 \mid + 4 \Leftrightarrow 3x = 4 \mid : 3 \Leftrightarrow x_w = \frac{4}{3}$$

Um nun die zugehörige y - Koordinate zu erhalten, wird die Lösungen der Gleichung in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 x_w = \frac{4}{3} &\Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 3 \\
 &= \frac{64}{54} - \frac{32}{9} - \frac{12}{6} + 3 = \frac{64}{54} - \frac{192}{54} - \frac{108}{54} + \frac{162}{54} = -\frac{74}{54} = -\frac{37}{27} \\
 &\Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{4}{3} \mid -\frac{37}{27}\right) \approx (1,33 \mid -1,37)}}
 \end{aligned}$$

zu 1 d)

Berechnung der Achsenschnittpunkte:

Der Schnittpunkt mit der y – Achse kann direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden: $f(0) = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 3)}}$

Die Schnittpunkte mit der x – Achse sind die Nullstellen von $f(x)$. Wenn wir die erste Nullstelle raten können, dann lässt sich die zu lösende Polynomgleichung durch Polynomdivision um einen Grad verringern.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 + 3 = \frac{1}{2} - 2 - \frac{3}{2} + 3 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} - \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(1 \mid 0)}}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right) : (x - 1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 \\
 \underline{-\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)} \\
 \quad -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \\
 \quad \underline{-\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right)} \\
 \quad \quad -3x + 3 \\
 \quad \quad \underline{-(-3x + 3)} \\
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 = 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$p = -3; q = -6 \Rightarrow D = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 6 = \frac{9}{4} + \frac{24}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$$

$$\begin{aligned}
 x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} &\Rightarrow x_1 = 1,5 + \sqrt{8,25} \approx 4,37 \\
 &\Rightarrow x_2 = 1,5 - \sqrt{8,25} \approx -1,37
 \end{aligned}$$

Nullstellen: $P_{x_1}(1 \mid 0)$; $P_{x_2}(4,37 \mid 0)$; $P_{x_3}(-1,37 \mid 0)$

zu 1 e)

HORNER – Schema:

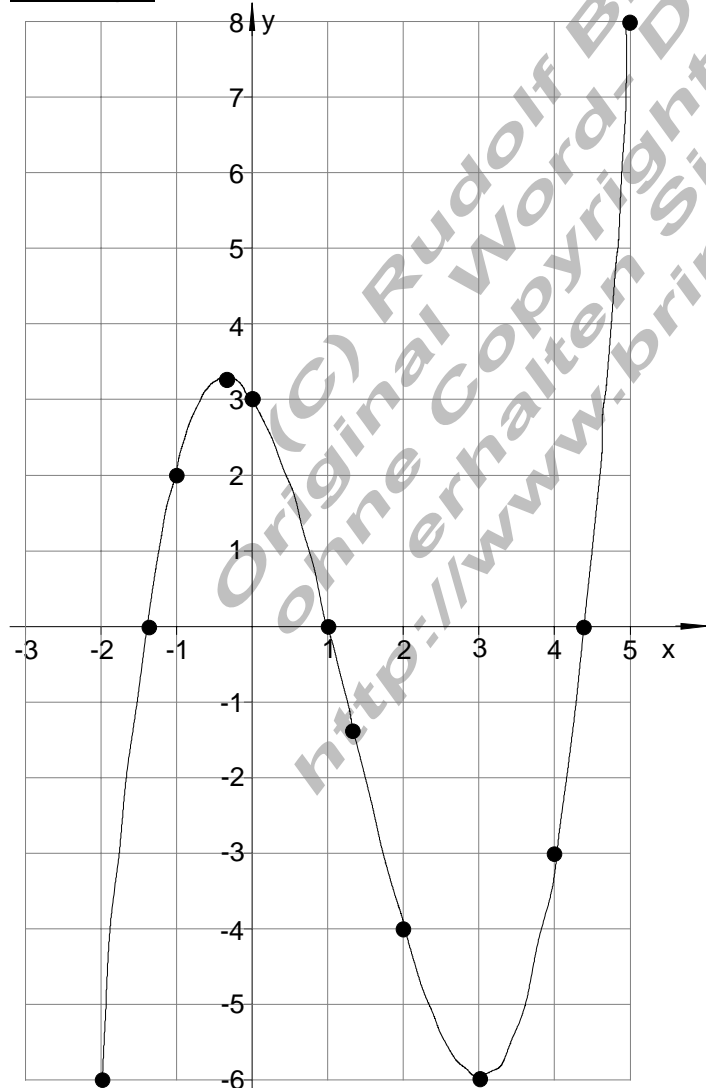
$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 0,5 & -2 & -1,5 & 3 \\
 x = 4 & \underline{+2} & \underline{+0} & \underline{-6} \\
 \hline
 0,5 & 0 & -1,5 & -3 \\
 \hline
 0,5 & -2 & -1,5 & 3 \\
 \hline
 0,5 & \underline{+2,5} & \underline{+2,5} & \underline{+5} \\
 0,5 & 0,5 & 1,0 & 8
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 f(4) = -3 \\
 f(5) = 8
 \end{array}
 \end{array}$$

zu 1 f)

Die Wertetabelle:

	P_1	P_{x3}	P_2	P_{\max}	P_y	P_{x1}	P_w	P_3	P_{\min}		
x	-2	-1,37	-1	-0,33	0	1	1,33	2	3	4	5
f(x)	-6	0	2	3,26	3	0	-1,37	-4	-6	-3	8

zu 1 g)

Der Graph:

zu 2

$$\text{a) } \int (x^3 - 2x^2 + x - 1) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$\text{b) } \int \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 \right) dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

$$\text{c) } \int (4x^3 - 3x^2 + 2x) dx = x^4 - x^3 + x^2 + C$$

zu 3

Die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x)$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{16}{25}x^2 + 4 = 0$$

$$-\frac{16}{25}x^2 + 4 = 0 \mid -4 \Leftrightarrow -\frac{16}{25}x^2 = -4 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{16}{25}x^2 = 4 \mid \cdot \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} \mid \sqrt{\quad} \Leftrightarrow |x| = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 2,5; x_2 = -2,5$$

$$A = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{16}{25}x^3 + 4 \right) dx = -\frac{16}{75}x^3 + 4x \Big|_{-2,5}^{2,5}$$

$$= -\frac{16}{75} \cdot 2,5^3 + 4 \cdot 2,5 - \left(-\frac{16}{75} \cdot (-2,5)^3 + 4 \cdot (-2,5) \right) = 13,3 = \underline{\underline{13\frac{1}{3}}}$$

Für das Tor wird $13,33 \text{ m}^2$ Holz benötigt.