Klassenarbeit	**Mathematik Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 2.11.2010**
SG29D Gruppe A	**NAME:**	

Hilfsmittel: Taschenrechner
Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.
Bei auftretenden Wurzeln genügt eine Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma.

1.)

a)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-1 \Rightarrow f'(x)=x+2$	**1 Punkt**
b)	$f(x)=3x-4+2x^3-6x+2x^2 \Rightarrow f'(x)=6x^2+4x-3$	**2 Punkte**
c)	$f(x)=(3x-2)^2=9x^2-12x+4 \Rightarrow f'(x)=18x-12$	**2 Punkte**
d)	$f(x)=ax^3+2bx^2+c^2-dx+2e \Rightarrow f'(x)=3ax^2+4bx-d$	**2 Punkte**
e)	$f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{5}x-\frac{4}{29} \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{4}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}$	**2 Punkte**
f)	$f(x)=(2x+1)(x+4)=2x^2+9x+4 \Rightarrow f'(x)=4x+9$	**2 Punkte**

2. Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}$$

a) Ist der Funktionsgraph symmetrisch?
Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie?
Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3)

Zu a)
Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur y – Achse. Es gilt $f(-x)=f(x)$.
In der Funktionsgleichung tritt die Variable x nur mit geraden Exponenten auf.

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte). (10)

Zu b)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=x^3-4x \quad \Rightarrow \quad f''(x)=3x^2-4 \quad \Rightarrow \quad f'''(x)=6x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\left(x^2-4\right) \Rightarrow x_2=2 \qquad x_3=-2$$

$$f''(x_1)=f''(0)=-4<0 \Rightarrow \text{rel. max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''(\pm 2)=8>0 \Rightarrow \text{rel. min. bei } x_{2/3}=\pm 2$$

$$P_{max}\left(0 \mid f(0)\right) \Rightarrow P_{max}\left(0 \mid -\frac{9}{4} \approx -2{,}25\right)$$

$$P_{min1/2}\left(x_{2/3} \mid f(x_{2/3})\right) \Rightarrow P_{min1/2}\left(\pm 2 \mid -\frac{25}{4}=-6{,}25\right)$$

c) Berechnen Sie die Wendepunkte. (7)

Zu c)

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4=0 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow 3x^2=4 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \mid \sqrt{\ } \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'''(x_{1/2})=f'''\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\pm 6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\neq 0$$

$$P_{w1/2}(x_{1/2} \mid f(x_{1/2})) \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx\pm 1{,}155 \mid -\frac{161}{36}\approx -4{,}472\right)$$

d) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte. (7)

Zu d)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4} \qquad f(0)=-\frac{9}{4}=-2{,}25 \Rightarrow P_y\left(0 \mid -\frac{9}{4}=-2{,}25\right)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}=0 \text{ Substitution } z=x^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}z^2-2z-\frac{9}{4}=0 \mid \cdot 4$$
$$\Leftrightarrow z^2-8z-9=0$$

$$p=-8 \qquad q=-9 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16+9=25 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{25}=5$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} z_1=4+5=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3 \\ z_2=4-5=-1 \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{array}\right.$$

$$P_{x1}(-3 \mid 0) \qquad P_{x2}(3 \mid 0)$$

e) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = -2,5 ; -1,5 ; -0,5 ; 0,5 ; 1,5 ; 2,5 und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf. Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma. (6)

Zu e)

$$f(-2{,}5) = f(2{,}5) \approx -4{,}98$$

$$f(-1{,}5) = f(1{,}5) \approx -5{,}48$$

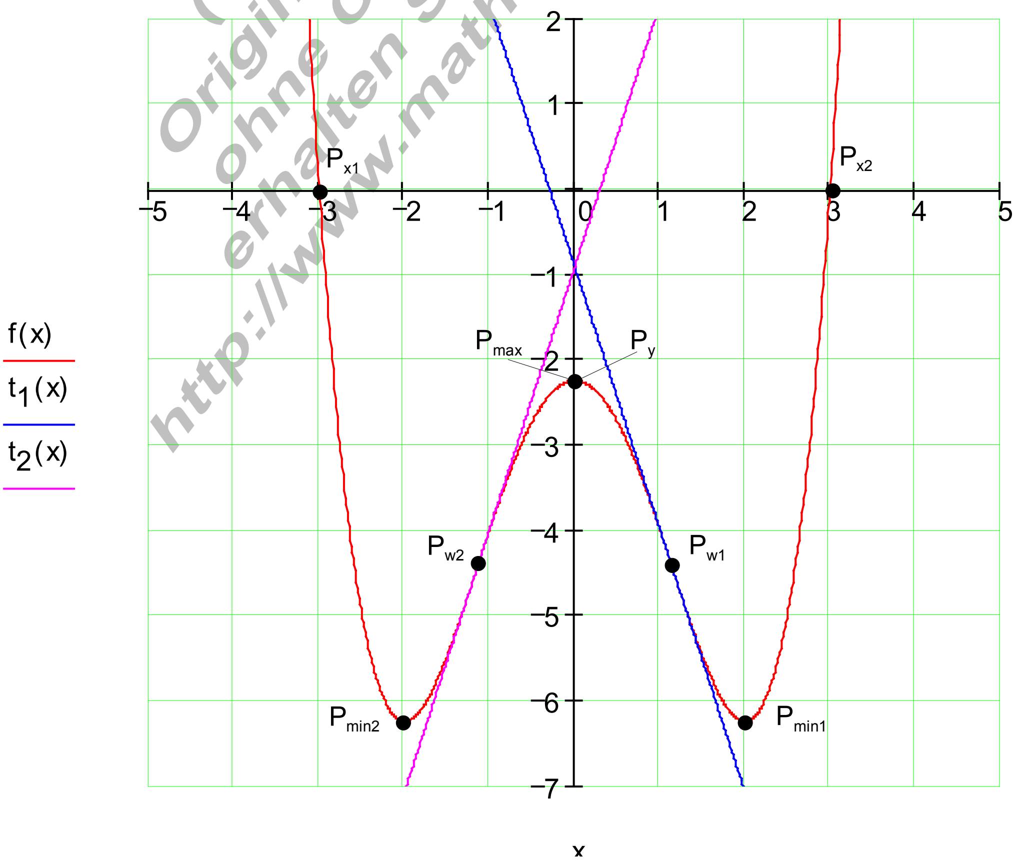
$$f(-0{,}5) = f(0{,}5) \approx -2{,}73$$

Wertetabelle:

	P_{x1}		P_{min2}		P_{w2}		P_y P_{max}
x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1,16	−0,5	0
f(x)	0	−4,98	−6,25	−5,48	−4,47	−2,73	−2,25
		P_{w1}		P_{min1}		P_{x2}	
x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3	
f(x)	−2,73	−4,47	−5,48	−6,25	−4,98	0	

f) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.) (6)

Zu f)



Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 2.11.2010**
SG29D Gruppe B	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.
Bei auftretenden Wurzeln genügt eine Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma.

zu 1

a)	$f(x)=\frac{3}{4}x^2+4x+5 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x+4$	**1 Punkt**
b)	$f(x)=3x^2-5+2x+x^2-7x \Rightarrow f'(x)=8x-5$	**2 Punkte**
c)	$f(x)=(4x+3)^2 \Rightarrow f'(x)=32x+24$	**2 Punkte**
d)	$f(x)=2ax^2-bx^3+cx+d^2-4e \Rightarrow f'(x)=-3bx^2+4ax+c$	**2 Punkte**
e)	$f(x)=-\frac{3}{4}x^3+3x^2-\frac{7}{4}x+\frac{17}{35} \Rightarrow f'(x)=-\frac{9}{4}x^2+6x-\frac{7}{4}$	**2 Punkte**
f)	$f(x)=(3x-2)(x-4) \Rightarrow f'(x)=6x-14$	**2 Punkte**

2. Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades:

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}$$

a) Ist der Funktionsgraph symmetrisch?
Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie?
Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3)

Zu a)
Der Funktionsgraph ist symmetrisch zur y – Achse. Es gilt $f(-x)=f(x)$.
In der Funktionsgleichung tritt die Variable x nur mit geraden Exponenten auf.

b) Berechnen Sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte). (10)
Zu b)

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-x^3+4x \quad\Rightarrow\quad f''(x)=-3x^2+4 \quad\Rightarrow\quad f'''(x)=-6x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+4x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-x^2+4\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\left(-x^2+4\right) \Rightarrow x_2=2 \qquad x_3=-2$$

$$f''(x_1)=f''(0)=4>0 \Rightarrow \text{rel. min. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''(\pm 2)=-8<0 \Rightarrow \text{rel. max. bei } x_{2/3}=\pm 2$$

$$P_{min}(0\,|\,f(0)) \Rightarrow P_{min}\left(0\,|\,\frac{9}{4}\approx 2{,}25\right)$$

$$P_{max1/2}(x_{2/3}\,|\,f(x_{2/3})) \Rightarrow P_{max1/2}\left(\pm 2\,|\,\frac{25}{4}=6{,}25\right)$$

c) Berechnen Sie die Wendepunkte. (7)

Zu c)

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+4=0 \mid -4$$

$$\Leftrightarrow -3x^2=-4 \mid :(-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \mid \sqrt{} \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'''(x_{1/2})=f'''\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\pm 6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\neq 0$$

$$P_{w1/2}\left(x_{1/2} \mid f(x_{1/2})\right) \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx\pm 1{,}155 \mid \frac{161}{36}\approx 4{,}472\right)$$

d) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte. (7)

Zu d)

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4} \qquad f(0)=\frac{9}{4}=2{,}25 \Rightarrow P_y\left(0 \mid \frac{9}{4}=2{,}25\right)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}=0 \text{ Substitution } z=x^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}z^2+2z+\frac{9}{4}=0 \mid \cdot(-4)$$

$$\Leftrightarrow z^2-8z-9=0$$

$$p=-8 \qquad q=-9 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16+9=25 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{25}=5$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} z_1=4+5=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3 \\ z_2=4-5=-1 \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{array}\right.$$

$$P_{x1}(-3 \mid 0) \qquad P_{x2}(3 \mid 0)$$

e) Berechnen Sie die Funktionswerte für x = -2,5 ; -1,5 ; -0,5 ; 0,5 ; 1,5 ; 2,5 und stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf. Genauigkeit in der Wertetabelle, zwei Stellen hinter dem Komma. (6)

Zu e)

$f(-2{,}5) = f(2{,}5) \approx 4{,}98$

$f(-1{,}5) = f(1{,}5) \approx 5{,}48$

$f(-0{,}5) = f(0{,}5) \approx 2{,}73$

Wertetabelle:

	P_{x1}		$P_{max\,2}$		P_{w2}		$P_y\ P_{max}$
x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	$-1{,}16$	$-0{,}5$	0
f(x)	0	4,98	6,25	5,48	4,47	2,73	2,25
		P_{w1}		$P_{max\,1}$		P_{x2}	
x	0,5	1,16	1,5	2	2,5	3	
f(x)	2,73	4,47	5,48	6,25	4,98	0	

f) Zeichnen Sie möglichst genau den Graphen und die Wendetangenten in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.) (6)

Zu f)