Klassenarbeit für Nachschreiber **SG29 D NAME:**	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.		Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$
	a)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	b)	Berechnen Sie den Scheitelpunkt und stellen Sie die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform dar.
	c)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall $I \in [-2;6]$ (d. h. x- Werte von –2 bis 6)
	d)	Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht.

A1 Ausführliche Lösung

a)

Die Achsenschnittpunkte von: $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

Schnittpunkt mit der $y-$Achse:

$$f(0) = \frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \,|\, \frac{5}{2}\right)}}$$

Schnittpunkte mit der $x-$Achse (Nullstellen):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow p = -4\,;\, q = -5 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 5 = 9$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \\ x_2 = 2 - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{P_{x1}(5 \,|\, 0)}} \\ \underline{\underline{P_{x2}(-1 \,|\, 0)}} \end{array}$$

A1 Ausführliche Lösung

b) Scheitelpunktbestimmung:

1. Verfahren über die Nullstellen:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_s = f(x_s) = f(2) = -\frac{1}{2}\cdot 4 + 2\cdot 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S\left(2 \,|\, \frac{9}{2}\right)}}$$

Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}}}$$

Scheitelpunktbestimmung:

2. Verfahren durch quadratische Ergänzung:

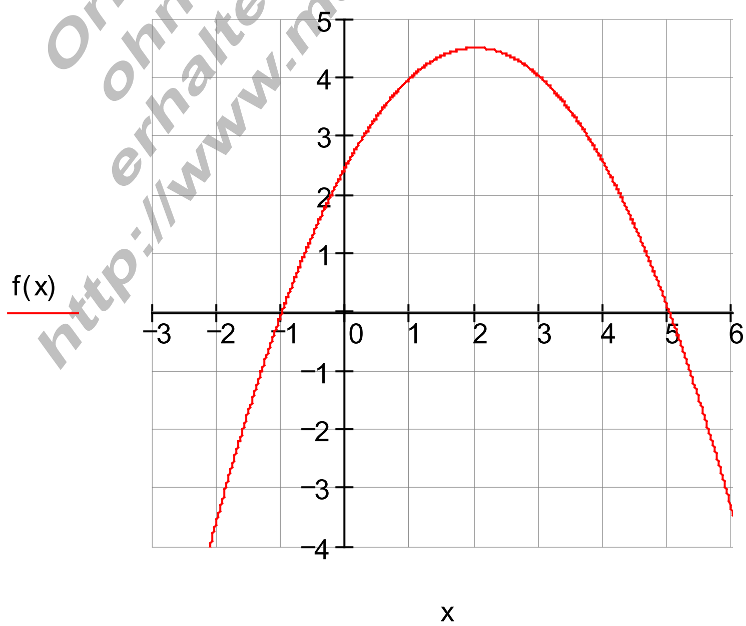
$$f(x) = -\frac{1}{2}\left[x^2 - 4x - 5\right] = -\frac{1}{2}\left[\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{\text{2. binomische Formel}} - 2^2 - 5\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x-2)^2 - 9\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}}}$$

A1 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x) := \frac{-1}{2}\cdot(x-2)^2 + 4.5$$



A1 Ausführliche Lösung

d) f(x) entsteht aus der Normalparabel durch folgende Umformungen:

--- Spiegelung an der x – Achse : $x^2 \mapsto -x^2$

--- Stauchung mit demFormfaktor $\frac{1}{2}$: $-x^2 \mapsto -\frac{1}{2}x^2$

--- Verschiebung um $\frac{9}{2}$ LE nach oben: $-\frac{1}{2}x^2 \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$

--- Verschiebung um 2 LE nach rechts: $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2} = f(x)$

2. Der Kraftstoffverbrauch eines PKW hängt bekanntlich von der Geschwindigkeit ab. Durch Messungen wurde der funktionale Zusammenhang ermittelt.
Es gilt: $K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55$ für $v > 40$
Dabei bedeuten:
K(v) der Kraftstoffverbrauch in Liter/100 km und
v die Geschwindigkeit in km/h.

a) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 7 Liter auf 100 km?

b) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten?

A2 Ausführliche Lösung

a) $K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55$ für $v > 40$

$K(v) = 7 \Leftrightarrow 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 = 7 \Leftrightarrow v^2 - 90v + 775 = 0$

$p = -90\,;\, q = 775 \Rightarrow D = 1250$

$v_1 = 45 + \sqrt{1250} \approx 80{,}36$

$v_2 = 45 - \sqrt{1250} \approx 9{,}6$ scheidet aus wegen $v > 40$

Bei einer Geschwindigkeit von 80,36 km/h ist der Verbrauch 7 Liter/100 km.

A2 Ausführliche Lösung

b) Scheitelpunkt ist Minimum

$$v_s = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{45 + \sqrt{1250} + 45 - \sqrt{1250}}{2} = \underline{\underline{45}}$$

$$K(45) = 0{,}002 \cdot 45^2 - 0{,}18 \cdot 45 + 8{,}55 = \underline{\underline{4{,}5}}$$

Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Verbrauch mit 4,5 Liter/ 100 km am geringsten.

3.	Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 1$	
	a)	Berechnen Sie die Schnittpunkte beider Parabeln. Hinweis: Um diese auszurechnen müssen Sie die beiden Funktionsgleichungen gleich setzen.
	b)	Berechnen Sie die Gleichung der Geraden h(x), die beide Schnittpunkte miteinander verbindet. Kontrollergebnis der Schnittpunkte: $P_1(3 \mid -2)$ und $P_2(0 \mid 1)$
	c)	Zeichnen Sie beide Parabeln und die Gerade in ein Koordinatensystem. Hilfestellung: Die Scheitelpunkte beider Parabeln sind: $f(x) \Rightarrow S_P(2 \mid -3)$ und $g(x) \Rightarrow S_P(0 \mid 1)$

A3 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

$\text{Ansatz}: f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \mid + x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 2x + 1 \mid -2x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 1 \mid -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ q. E.

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \mid \sqrt{} \Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

Fall I: $x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 3$ Fall II: $x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 0$

$y_1 = f(x_1) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$

$y_2 = f(x_2) = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$

Die Parabeln schneiden sich in den Punkten $P_1(3 \mid -2)$ und $P_2(0 \mid 1)$

A3 Ausführliche Lösung

b) $P_1(3 \mid -2) ; P_2(0 \mid 1)$ $h(x) = a_1 x + a_0$

$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{0 - 3} = \frac{1 + 2}{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow h(x) = -x + a_0$

$P_2(0 \mid 1) \Rightarrow h(0) = 1 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{h(x) = -x + 1}}$

A3	Ausführliche Lösung
	c)