

Klassenarbeit SG28D Gruppe A	Mathematik NAME:	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 29.06.10
---	-----------------------------------	---------------------------------	--------------------

Hilfsmittel: Taschenrechner

Falls Extremwerte zu berechnen sind, ist der rechnerische Nachweis zu erbringen.

1.	Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$											
a)	Untersuchen Sie f_k auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.											
b)	Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von $f_k(x)$.											
c)	Untersuchen Sie f_k auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.											
d)	Untersuchen Sie f_k auf Wendepunkte und berechnen Sie diese (Ohne Nachweis).											
e)	Berechnen Sie die Ortskurve $f_{ok}(x)$ für die Extrempunkte (P_{kE}).											
f)	Bestimmen Sie die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten und der x-Achse.											
g)	Lesen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) aus der Wertetabelle ab und tragen Sie die Werte in folgendes Schema ein :											
	$P_{1y}(0 1,25)$	$P_{2y}(0 2,5)$	$P_{3y}(0 3,75)$	$P_{4y}(0 5)$								
	$P_{1x}(1 0)$	$P_{2x}(2 0)$	$P_{3x}(3 0)$	$P_{4x}(4 0)$								
	$P_{1E}(-1 1,52)$	$P_{2E}(0 2,5)$	$P_{3E}(1 4,12)$	$P_{4E}(2 6,8)$								
	$P_{1W}(-3 1,12)$	$P_{2W}(-2 1,84)$	$P_{3W}(-1 3,03)$	$P_{4W}(0 5)$								
	Berechnen Sie für die Ortskurve mit dem Taschenrechner die Funktionswerte auf 2 Stellen hinter dem Komma genau und tragen Sie die Werte in die Tabelle ein.											
	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2			
	$f_{ok}(x)$	0,21	0,34	0,56	0,92	1,52	2,5	4,12	6,8			
	Zeichnen Sie die Graphen für $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$; $f_4(x)$ und die Ortskurve $f_{ok}(x)$ in ein geeignetes Koordinatensystem.											
	Verwenden Sie dafür die berechneten Werte und folgende Wertetabelle.											
	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
	$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
	$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
	$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
	$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2
h)	Berechnen Sie für $k = 4$ die Fläche A_4 und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.											

Kontrollergebnisse:

$$f'(x) = \left[\frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x} \quad f''(x) = \left[\frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad P_{kE} \left(k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-1)} \right)$$

Aufgabe 1:

a)	<p>Achsenschnittpunkte</p> $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(k-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = \frac{5}{4} \cdot k \cdot 1 = \frac{5}{4}k \Rightarrow P_y \left(0 \mid \frac{5}{4}k \right)$ $P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x) \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow P_x(k \mid 0)$
b)	<p>Die ersten beiden Ableitungen</p> <p>1. Ableitung:</p> $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{4}(k-x) \Rightarrow u' = -\frac{5}{4}$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k'(x) = -\frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(k-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = -\frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8} \cdot (k-x) e^{\frac{1}{2}x} = \left[\frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x}$
b)	<p>2. Ableitung</p> $f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \Rightarrow u' = -\frac{5}{8}$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k''(x) = -\frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[\frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{ -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $= \left[-\frac{5}{8} + \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{8} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left[\frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

c) Extrempunkte

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} \right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} = 0 \quad | : \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow k-x-2 = 0 \quad | +x$$

$$\Leftrightarrow k-2 = x \Rightarrow x_E = k-2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$$

Überprüfung mit der 2. Ableitung: $f_k''(x_E) \neq 0$

$$\begin{aligned} f_k''(x_E) &= f_k''(k-2) = \left\{ \frac{5}{16} [k - (k-2)] - \frac{5}{4} \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \\ &= \left[\frac{5}{16} (k-k+2) - \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left(\frac{5}{8} - \frac{10}{8} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}(k-2)}}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

Bei $x = x_E = k-2$ liegt ein relatives Maximum.

$$f_k(x) = \frac{5}{4} (k-x) e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} f_k(x_E) &= f_k(k-2) = \frac{5}{4} [k - (k-2)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \\ &= \frac{5}{4} (k-k+2) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \Rightarrow P_{k_{\text{Max}}} \left(k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} \right) \end{aligned}$$

d) Der Wendepunkt

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{16} (k-x) - \frac{5}{4} \right] \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16} (k-x) - \frac{5}{4} = 0 \quad | + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16} (k-x) = \frac{5}{4} \quad | : \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow k-x = 4 \quad | -k \Leftrightarrow -x = 4-k \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow x = k-4$$

Wendestelle bei $x = x_W = k-4$

$$f_k(x) = \frac{5}{4} (k-x) e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_W) = f_k(k-4) = \frac{5}{4} [k - (k-4)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)}$$

$$P_{k_W} \left(k-4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} \right)$$

e) Die Ortskurve

$$P_{k_{\text{Max}}} \left(k-2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right) \Rightarrow \underbrace{x = k-2}_{(1)} \quad \text{und} \quad \underbrace{y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}_{(2)}$$

$$x = k-2 \Leftrightarrow k = x+2 \text{ in (2) eingesetzt: } y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x+2)-1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x+1-1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Funktionsgleichung der Ortskurve: $f_{\text{OK}}(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

f) Die Fläche A_k

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right|$$

$$\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4} (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{5}{4} \int \underbrace{(k-x)}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_v dx$$

Produktintegration $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$

$$u = k-x \Rightarrow u' = -1$$

$$v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (k-x) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int (-1) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= (2k-2x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= (2k-2x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = (-2x+2k+4) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} \int (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \left(-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x) dx = \left[\left(-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$$

$$= \left(-\frac{5}{2}k + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(-\frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$$

$$= 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(\frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^0 \right] = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left(\frac{5}{2}k + 5 \right) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5$$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \right|$$

f)	<p>Die Fläche A_k</p> <p>Variante:</p> $A_k = \left \int_0^k f_k(x) dx \right $ $\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4}(k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \int \frac{5}{4}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx - \int \frac{5}{4}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= \frac{5}{4}k \cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x} dx}_I - \frac{5}{4} \cdot \underbrace{\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = \frac{5}{4}k \cdot I - \frac{5}{4} \cdot II$ <p>I: $\int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$</p> <p>II: $\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$ mit $u = x \Rightarrow u' = 1$</p> <p style="text-align: center;">und $v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ wird</p> $\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = x \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int f_k(x) dx = \frac{5}{4}k \cdot I - \frac{5}{4} \cdot II = \frac{5}{4}k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{4} \left(2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) + C$ $= \frac{5}{2}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}x + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C = \left(-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int_0^k f_k(x) dx = \left[\left(-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$ $= \left(-\frac{5}{2}k + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(-\frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$ $= 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(\frac{5}{2}k + 5 \right) \cdot e^0 \right] = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left(\frac{5}{2}k + 5 \right) = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5$ $A_k = \left \int_0^k f_k(x) dx \right = \left 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \right $
----	---

g) Die Graphen

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y} \left(0 \mid \frac{5}{4}k \right)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

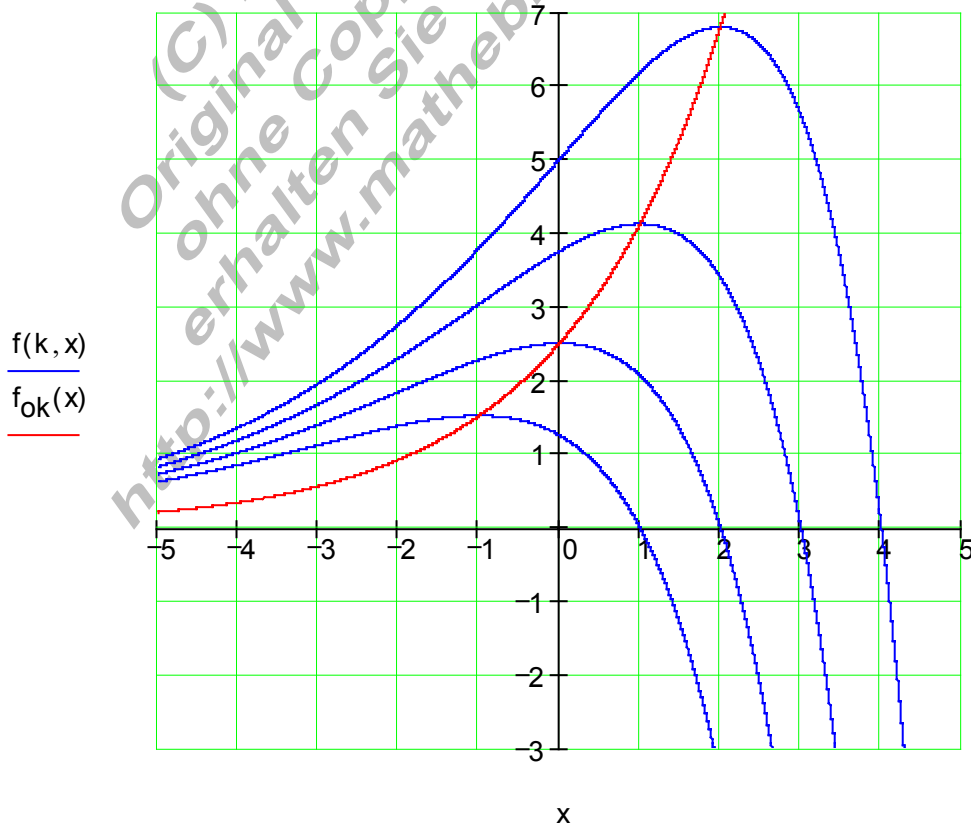
$P_{k_x} (k \mid 0)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{\text{Max}}} \left(k - 2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{\text{Max}}} (-1 \mid 1,52); P_{2_{\text{Max}}} (0 \mid 2,5); P_{3_{\text{Max}}} (1 \mid 4,12); P_{4_{\text{Max}}} (2 \mid 6,8)$

$P_{k_w} \left(k - 4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_w} (-3 \mid 1,12); P_{2_w} (-2 \mid 1,84); P_{3_w} (-1 \mid 3,03); P_{4_w} (0 \mid 5)$



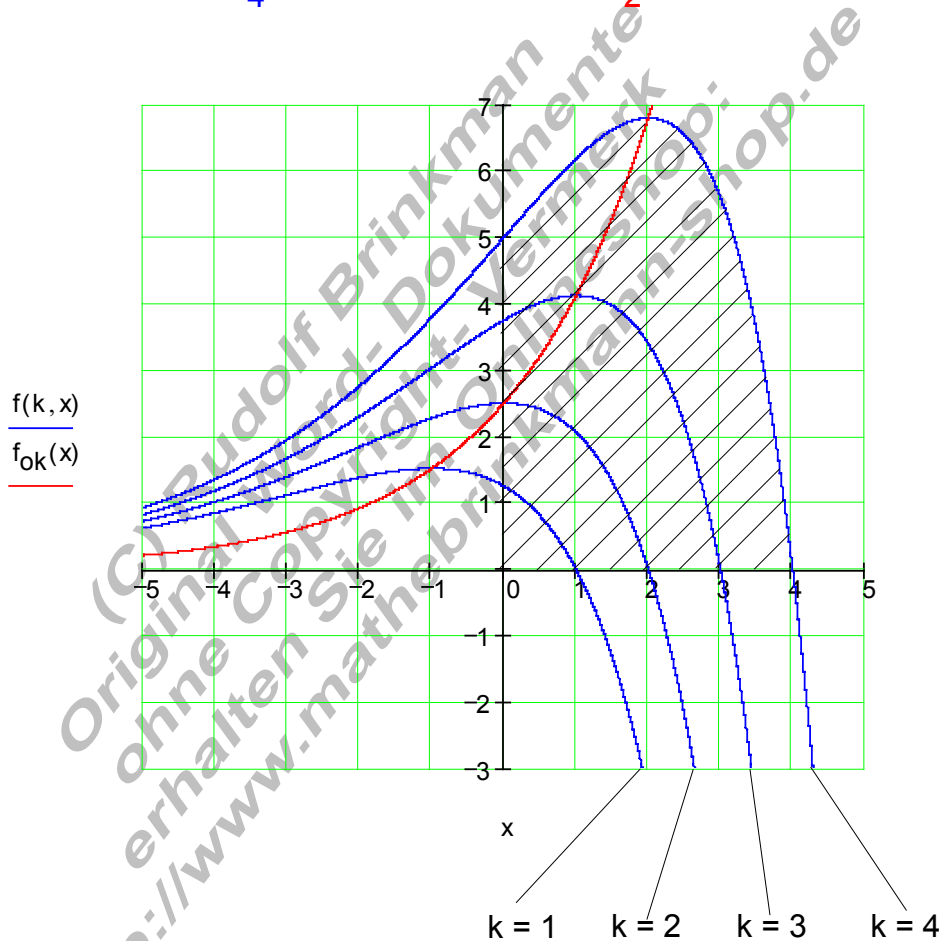
h) Flächenberechnung für $k = 4$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| 5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \frac{5}{2}k - 5 \right|$$

$$A_4 = \left| \int_0^4 f_4(x) dx \right| = \left| 5 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - \frac{5}{2} \cdot 4 - 5 \right| = \left| 5 \cdot e^2 - 10 - 5 \right| = \left| 5 \cdot e^2 - 15 \right| \approx \underline{\underline{21,95FE}}$$

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_{OK}(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$



Klassenarbeit SG28D Gruppe B	Mathematik NAME:	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 29.06.10
---	-----------------------------------	---------------------------------	--------------------

Hilfsmittel: Taschenrechner

Falls Extremwerte zu berechnen sind, ist der rechnerische Nachweis zu erbringen.

1. Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie f_k auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.

b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von $f_k(x)$.

c) Untersuchen Sie f_k auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.

d) Untersuchen Sie f_k auf Wendepunkte und berechnen Sie diese (Ohne Nachweis).

e) Berechnen Sie die Ortskurve $f_{ok}(x)$ für die Extrempunkte (P_{kE}).

f) Bestimmen Sie die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten und der x-Achse.

g) Lesen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) aus der Wertetabelle ab und tragen Sie die Werte in folgendes Schema ein :

$P_{1y}(0 -1,25)$	$P_{2y}(0 -2,5)$	$P_{3y}(0 -3,75)$	$P_{4y}(0 -5)$
$P_{1x}(1 0)$	$P_{2x}(2 0)$	$P_{3x}(3 0)$	$P_{4x}(4 0)$
$P_{1E}(-1 -1,52)$	$P_{2E}(0 -2,5)$	$P_{3E}(1 -4,12)$	$P_{4E}(2 -6,8)$
$P_{1W}(-3 -1,12)$	$P_{2W}(-2 -1,84)$	$P_{3W}(-1 -3,03)$	$P_{4W}(0 -5)$

Berechnen Sie für die Ortskurve mit dem Taschenrechner die Funktionswerte auf 2 Stellen hinter dem Komma genau und tragen Sie die Werte in die Tabelle ein.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f_{ok}(x)$	-0,21	-0,34	-0,56	-0,92	-1,52	-2,5	-4,12	-6,8

Zeichnen Sie die Graphen für $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$; $f_4(x)$ und die Ortskurve $f_{ok}(x)$ in ein geeignetes Koordinatensystem.
Verwenden Sie dafür die berechneten Werte und folgende Wertetabelle.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	-3,4	-11,2	-27,7	-60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	-5,6	-18,5	-45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	-9,24	-30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	-15,2

h) Berechnen Sie für $k = 4$ die Fläche A_4 und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

a) Achsenschnittpunkte

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(0-k)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -\frac{5}{4} \cdot k \cdot 1 = -\frac{5}{4}k \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -\frac{5}{4}k\right)}}$$

$$P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow \underline{\underline{P_x(k \mid 0)}}$$

b)	Die ersten beiden Ableitungen
	1. Ableitung
	$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$
	$f_k'(x) = u'v + uv'$ mit $u = \frac{5}{4}(x-k) \Rightarrow u' = \frac{5}{4}$
	und $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
	$f_k'(x) = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(x-k) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8} \cdot (x-k) e^{\frac{1}{2}x} = \left[\frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} \right] e^{\frac{1}{2}x}$

b)	2. Ableitung
	$f_k''(x) = u'v + uv'$ mit $u = \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \Rightarrow u' = \frac{5}{8}$
	und $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
	$f_k''(x) = \frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[\frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{ \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
	$= \left[\frac{5}{8} + \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{8} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left[\frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

c)	Extrempunkte
	$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} \right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$
	$\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} = 0 \mid : \frac{5}{8}$
	$\Leftrightarrow x-k+2=0 \mid +k-2$
	$\Leftrightarrow x \Rightarrow x_E = k-2$ ist mögliche Extremstelle.
	Überprüfung mit der 2. Ableitung: $f_k''(x_E) \neq 0$
	$f_k''(x_E) = f_k''(k-2) = \left\{ \frac{5}{16} [(k-2)-k] + \frac{5}{4} \right\} \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$
	$= \left[\frac{5}{16}(k-2-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \left(-\frac{5}{8} + \frac{10}{8} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = \frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}(k-2)}}_{>0} > 0$
	Bei $x = x_E = k-2$ liegt ein relatives Minimum.
	$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$
	$f_k(x_E) = f_k(k-2) = \frac{5}{4} [(k-2)-k] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}$
	$= \frac{5}{4}(k-2-k) \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \Rightarrow P_{k_{\text{Min}}} \left(k-2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$

d)	<p>Der Wendepunkt</p> $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4} \right] \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4} = 0 \quad -\frac{5}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k) = -\frac{5}{4} \quad : \frac{5}{16}$ $\Leftrightarrow x-k = -4 \quad +k \Leftrightarrow x = k-4$ <p>Wendestelle bei $x = x_W = k-4$</p> $f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$ $f_k(x_W) = f_k(k-4) = \frac{5}{4}[(k-4)-k] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = \frac{5}{4} \cdot (-4) \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$ $P_{k_W} \left(k-4 \mid -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$
----	--

e)	<p>Die Ortskurve</p> $P_{k_{\text{Min}}} \left(k-2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right) \Rightarrow \underbrace{x = k-2}_{(1)} \quad \text{und} \quad \underbrace{y = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}_{(2)}$ $x = k-2 \Leftrightarrow k = x+2 \quad \text{in (2) eingesetzt: } y = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x+2)-1} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x+1-1} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ <p>Funktionsgleichung der Ortskurve: $f_{\text{OK}}(x) = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$</p>
----	---

f) Die Fläche A_k

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right|$$

$$\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4}(x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{5}{4} \int \underbrace{(x-k)}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx$$

Produktintegration $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$

$$u = x - k \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int (x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (x-k) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= (2x-2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= (2x-2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = (2x-2k-4) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} \int (x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x) dx = \left[\left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$$

$$= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(\frac{5}{2} \cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$$

$$= -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(-\frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^0 \right] = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5$$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 \right|$$

f)	<p>Die Fläche A_k</p> <p>Variante:</p> $A_k = \left \int_0^k f_k(x) dx \right $ $\int f_k(x) dx = \int \frac{5}{4}(x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \int \frac{5}{4}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx - \int \frac{5}{4}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= \frac{5}{4} \underbrace{\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_I - \frac{5}{4}k \cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = \frac{5}{4} \cdot I - \frac{5}{4}k \cdot II$ <p>II: $\int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$</p> <p>I: $\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$ mit $u = x \Rightarrow u' = 1$ und $v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ wird</p> $\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = x \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$ $= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int f_k(x) dx = \frac{5}{4} \cdot I - \frac{5}{4}k \cdot II = \frac{5}{4} \left(2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) - \frac{5}{4}k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $= \frac{5}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 5 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $= \left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$ $\int_0^k f_k(x) dx = \left[\left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$ $= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(\frac{5}{2} \cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right]$ $= -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left[\left(-\frac{5}{2}k - 5 \right) \cdot e^0 \right] = -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5$ $A_k = \left \int_0^k f_k(x) dx \right = \left -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k} + \frac{5}{2}k + 5 \right $
----	---

g) Die Graphen

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	-0,62	-0,85	-1,12	-1,38	-1,52	-1,25	0	3,4	11,2	27,7	60,9
$f_2(x)$	-0,72	-1,02	-1,39	-1,84	-2,27	-2,5	-2,06	0	5,6	18,4	45,7
$f_3(x)$	-0,82	-1,18	-1,67	-2,3	-3,03	-3,75	-4,12	-3,4	0	9,24	30,5
$f_4(x)$	-0,92	-1,35	-1,95	-2,76	-3,79	-5	-6,18	-6,8	-5,6	0	15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y} \left(0 \mid -\frac{5}{4}k \right)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

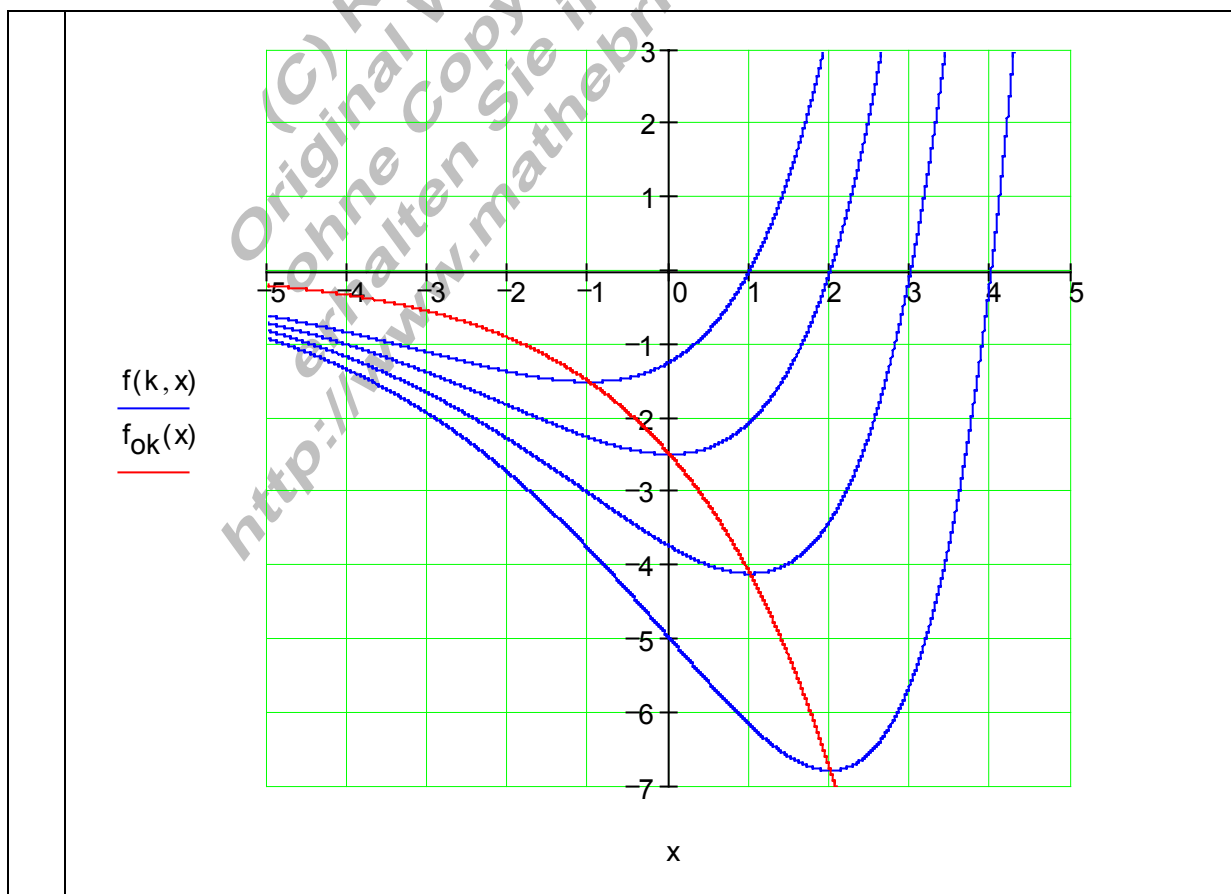
$P_{k_x} (k \mid 0)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{\text{Min}}} \left(k - 2 \mid -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{\text{Min}}} (-1 \mid -1,52); P_{2_{\text{Min}}} (0 \mid -2,5); P_{3_{\text{Min}}} (1 \mid -4,12); P_{4_{\text{Min}}} (2 \mid -6,8)$

$P_{k_w} \left(k - 4 \mid -5 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_w} (-3 \mid -1,12); P_{2_w} (-2 \mid -1,84); P_{3_w} (-1 \mid -3,03); P_{4_w} (0 \mid -5)$



h) Flächenberechnung für $k = 4$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right| = \left| -5 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k} + \frac{5}{2} k + 5 \right|$$

$$A_4 = \left| \int_0^4 f_4(x) dx \right| = \left| -5 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} + \frac{5}{2} \cdot 4 + 5 \right| = \left| -5 \cdot e^2 + 10 + 5 \right| = \left| -5 \cdot e^2 + 15 \right| \approx \underline{\underline{21,95 \text{ FE}}}$$

