Klassenarbeit **Mathematik** **Bearbeitungszeit 90 min.** **Di 15.12.09**
SG28D Gruppe A **NAME: Lösungen**

1. Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \left(-x^4+8x^3-24x^2+32x-16\right)dx$

A1 Ausführliche Lösung

$$\int_0^2 \left(-x^4+8x^3-24x^2+32x-16\right)dx = -\frac{1}{5}x^5+2x^4-8x^3+16x^2-16x \Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot 32+2\cdot 16-8\cdot 8+16\cdot 4-16\cdot 2 = -\frac{32}{5}+\cancel{32}-\cancel{64}+\cancel{64}-\cancel{32} = \underline{\underline{-\frac{32}{5}=-6,4}}$$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$

Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, wobei die Nullstellen die Integrationsgrenzen bilden.
Wie liegt der Graph in Bezug auf die x- Achse?

A2 Ausführliche Lösung

Nullstellenberechnung

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4-3x^2-8=0 \text{ Substitution mit } x^2=z$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2-3z-8=0 \,|\cdot\frac{4}{5} \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow p=-\frac{12}{5};\ q=-\frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{32}{5}=\frac{36}{25}+\frac{160}{25}=\frac{196}{25} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\ \begin{array}{l} z_1=\frac{6}{5}+\frac{14}{5}=\frac{20}{5}=4 \\ z_2=\frac{6}{5}-\frac{14}{5}=-\frac{8}{5}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow z_1=4 \text{ bzw. } z_2=-\frac{8}{5}\ \ (\text{keine Lösung})$$

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

A2 Ausführliche Lösung

Flächenberechnung

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right)dx = \left.\frac{x^5}{4} - x^3 - 8x\,\right|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2^5}{4} - 2^3 - 8\cdot 2 - \left[\frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8\cdot(-2)\right] = \frac{32}{4} - 8 - 16 - \left[-\frac{32}{4} - (-8) + 16\right]$$

$$= 8 - 8 - 16 - (-8 + 8 + 16) = -16 - (16) = -32$$

Die Fläche: $A = \left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right)dx\right| = |-32| = 32\ \text{FE}$

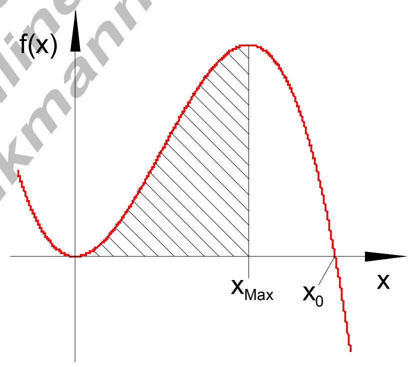
Da das Ergebnis der Integration negativ ist, liegt der Graph von f unterhalb der x- Achse.

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie die Extrempunkte.

b) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.



A3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3 \mid \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } \underline{\underline{P_{Min}(0 \mid 0)}}$$

$$f(x_2) = f(4) = -16 + 24 = 8 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } \underline{\underline{P_{Max}(4 \mid 8)}}$$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad A = \left|\int_0^4 f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^4 = -16 + 32 = 16$$

$$\underline{\underline{A = 16\,FE}}$$

4. In der Landwirtschaft wird die Reaktionsstärke R auf ein Düngemittel in Abhängigkeit von der gegebenen Menge x (Dosis) durch folgende Funktionsgleichung beschrieben: $R(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

Die momentane Änderungsrate der Reaktionsstärke ist ein Maß für die Empfindlichkeit der Pflanze auf die verabreichte Dosis x.
Eine Testreihe ergab folgende Werte:

x	0	1	2	3	4	5	6
R(x)	0	0,625	2	3,375	4	3,125	0

a) Für welchen Dosiswert ist die Reaktion am stärksten?

b) Bei welcher Dosis reagiert die Pflanze am empfindlichsten auf das Düngemittel?

c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

d) Welche Schlussfolgerung kann ein Landwirt aus diesen Ergebnissen ziehen?

A4 Ausführliche Lösung

a) Für welchen Dosiswert ist die Reaktion am stärksten?
Gesucht ist die maximale Reaktionsstärke in Abhängigkeit von der Dosis.
Die maximale Reaktionsstärke entspricht dem Maximum von R(x).

$$R(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow R'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \Rightarrow R''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

$R'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$ hier kann x ausgeklammert werden

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{8}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{8}x + \frac{3}{2} = 0 \,\Big|\, -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{8}x = -\frac{3}{2} \,\Big|\cdot\left(-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow x_2 = 4$$

An den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ befinden sich waagerechte Tangenten.

$R''(x_1) = R''(0) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_1 = 0$

$R''(x_2) = R''(4) = -\frac{3}{4}\cdot 4 + \frac{3}{2} = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_2 = 4$

Wegen $P_3(4|4)$ gilt: $P_{Max}(4|4)$

Für einen Dosiswert von x = 4 ist die Reaktion am stärksten.

A4 Ausführliche Lösung

b) Bei welcher Dosis reagiert die Pflanze am empfindlichsten auf das Düngemittel?

Die momentane Änderungsrate von R(x) ist ein Maß für die Empfindlichkeit der Pflanze auf das Düngemittel. Da die momentane Änderungsrate einer Funktion deren Steigung entspricht, wird der Dosiswert x gesucht, bei der die Steigung des Graphen von R(x) maximal ist. Der Wendepunkt kennzeichnet den Punkt
mit maximaler, bzw. minimaler Steigung.

$$R(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow R'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \Rightarrow R''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \Rightarrow R'''(x) = -\frac{3}{4}$$

$$R''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \,|\, -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x = -\frac{3}{2} \,|\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2 \text{ mögliche Wendestelle}$$

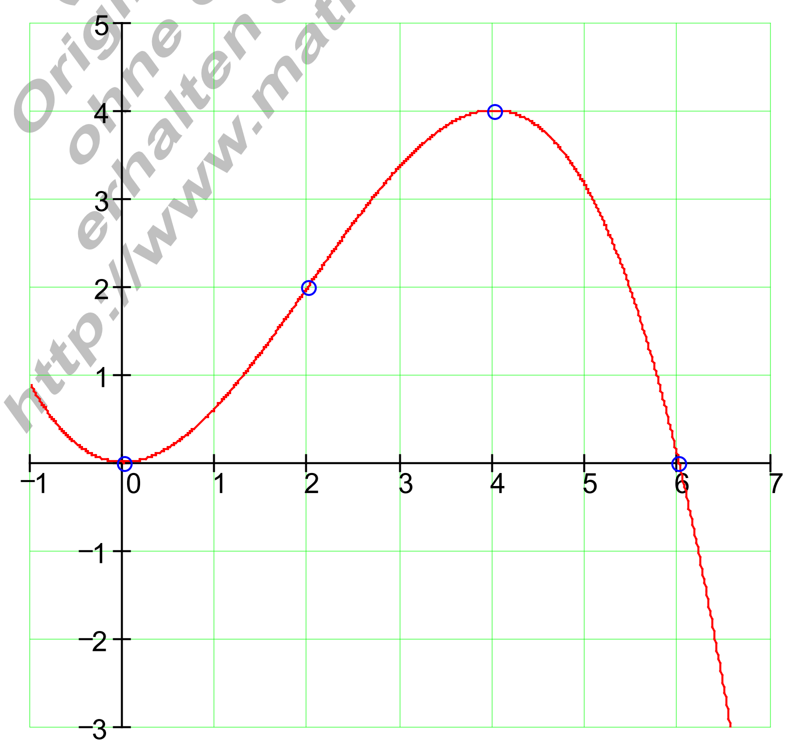
$$R'''(x) = -\frac{3}{4} \Rightarrow R'''(x) = R'''(2) = -\frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow x = x_w = 2 \text{ ist Wendestelle}$$

Wegen $P_2(2|2)$ gilt: $P_w(2|2)$

Bei einen Dosiswert von x = 2 reagiert die Pflanze am empfindlichsten auf das Düngemittel.

A4 Ausführliche Lösung

c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.



A4	Ausführliche Lösung		
	d)	Welche Schlussfolgerung kann ein Landwirt aus diesen Ergebnissen ziehen?	
		$P_1 (0 \mid 0)$	Wird kein Düngemittel gegeben, ist auch keine Reaktion der Pflanze zu erwarten.
		$P_{Max} (4 \mid 4)$	Bei der Dosis x = 4 ist die Reaktion der Pflanze am stärksten (Düngungsoptimum). Wird mehr gegeben, so spricht man von Überdüngung mit geringerem Erfolg.
		$P_W (2 \mid 2)$	Die Empfindlichkeit der Pflanze auf Dünger ist bei der Dosis x = 2 am stärksten. Dort bewirken geringste Dosisverstärkungen die stärkste Reaktionszunahme.
		$P_4 (6 \mid 0)$	Bei der Dosis x = 6 erfolgt keine Reaktion der Planze mehr. Für x > 6 ist das Ergebnis schlechter als ohne Düngung. Die Pflanze würde sich zurückentwickeln, bzw. absterben.
		Aus Kostengründen würde der Landwirt sich möglicherweise für eine Dosierung im Bereich 2 < x < 4 entscheiden.	

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 15.12.09**
SG28D Gruppe B	**NAME: Lösungen**		

1.	Berechnen Sie das Integral $\int_1^2 \left(x^4+8x^3+24x^2+32x+16\right)dx$

A1 Ausführliche Lösung

$$\int_1^2 \left(x^4+8x^3+24x^2+32x+16\right)dx = \frac{1}{5}x^5+2x^4+8x^3+16x^2+16x\,\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 32+2\cdot 16+8\cdot 8+16\cdot 4+16\cdot 2-\left(\frac{1}{5}+2+8+16+16\right)$$

$$=\frac{32}{5}+32+64+64+32-\left(42+\frac{1}{5}\right)=\frac{31}{5}+150=\frac{781}{5}=\underline{\underline{156,2}}$$

2.	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x)=-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8$
	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, wobei die Nullstellen die Integrationsgrenzen bilden. Wie liegt der Graph in Bezug auf die x- Achse?

A2 Ausführliche Lösung

Nullstellenberechnung

$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^4+3x^2+8=0$ Substitution mit $x^2=z$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4}z^2+3z+8=0\,\Big|\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow p=-\frac{12}{5};\ q=-\frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{32}{5}=\frac{36}{25}+\frac{160}{25}=\frac{196}{25} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\ \begin{array}{l} z_1=\frac{6}{5}+\frac{14}{5}=\frac{20}{5}=4 \\ z_2=\frac{6}{5}-\frac{14}{5}=-\frac{8}{5} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z_1=4$ bzw. $z_2=-\frac{8}{5}$ (keine Lösung)

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

A2 Ausführliche Lösung

Flächenberechnung

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8\right)dx = -\frac{x^5}{4}+x^3+8x\Big|_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{2^5}{4}+2^3+8\cdot 2-\left[-\frac{(-2)^5}{4}+(-2)^3+8\cdot(-2)\right] = -\frac{32}{4}+8+16-\left[\frac{32}{4}+(-8)-16\right]$$

$$= -8+8+16-(8-8-16) = 16-(-16) = 32$$

Die Fläche: $A = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8\right)dx = 32\ \text{FE}$

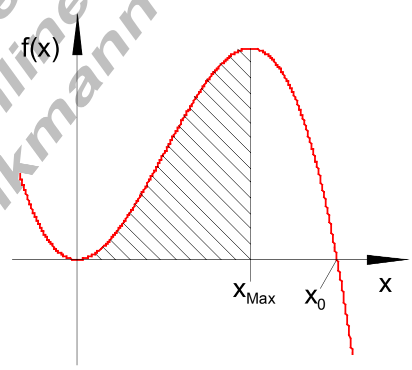
Da das Ergebnis der Integration positiv ist, liegt der Graph von f oberhalb der x- Achse.

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie die Extrempunkte.

b) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.



A3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{1}{4}x^2+3x \qquad f''(x) = -\frac{1}{2}x+3$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{4}x+3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x+3\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x=3|\cdot 4 \Leftrightarrow x_2=12$$

$$f''(x_1)=f''(0)=3>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=0$$

$$f''(x_2)=f''(12)=-3<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=12$$

$$f(x_1)=f(0)=0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } P_{Min}(0|0)$$

$$f(x_2)=f(12)=-144+216=72 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } P_{Max}(12|72)$$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{42}x^2 \qquad A = \left|\int_0^{12} f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^{12} f(x)\,dx = \int_0^{12}\left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^{12} = -432 + 864 = 432$$

$$\underline{\underline{A = 432\,FE}}$$

4.

In der Krebstherapie wird die Effizienz E einer Bestrahlung in Abhängigkeit von der gegebenen Dosis x durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:

$$R(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

Die Steigung des Graphen von E(x) ist ein Maß für die Effizienzänderung in Abhängigkeit von der Dosis x.
Eine Testreihe ergab folgende Werte:

x	0	1	2	3	4	5	6
$E(x)$	0	1,25	4	6,75	8	6,25	0

a) Für welchen Dosiswert ist die Effizienz der Bestrahlung am größten?

b) Bei welcher Dosis ist die Effizienzzunahme am größten?

c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

d) Welche Schlussfolgerung kann ein Arzt aus diesen Ergebnissen ziehen?

A4 Ausführliche Lösung

a) Für welchen Dosiswert ist die Effizienz der Bestrahlung am größten?
Gesucht ist die maximale Effizienz in Abhängigkeit von der Dosis.
Die maximale Effizienz entspricht dem Maximum von E(x).

$$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow E'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \Rightarrow E''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 3x = 0$ hier kann x ausgeklammert werden

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x + 3 = 0 \,|-3 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x = -3 \,|\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x_2 = 4$$

An den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ befinden sich waagerechte Tangenten.

$E''(x_1) = E''(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_1 = 0$

$E''(x_2) = E''(4) = -\frac{3}{2}\cdot 4 + 3 = -6 + 3 = -3 < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_2 = 4$

Wegen $P_3(4\,|\,8)$ gilt: $P_{Max}(4\,|\,8)$

Für einen Dosiswert von x = 4 ist die Effizienz der Bestrahlung am größten.

A4 Ausführliche Lösung

b) Bei welcher Dosis ist die Effizienzzunahme am größten?

Da die Steigung des Graphen von E(x) ein Maß für die Effizienzzunahme ist, wird die Stelle gesucht, an der die Steigung des Graphen am größten ist. Die Stelle entspricht dem Dosiswert der größten Effizienzzunahme. Gesucht ist also die Wendestelle, denn dort nimmt die Steigung des Graphen einen Extremwert an.

$$E(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow E'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \Rightarrow E''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow E'''(x) = -\frac{3}{2}$$

$$E''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \mid -3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = -3 \mid \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2 \text{ mögliche Wendestelle}$$

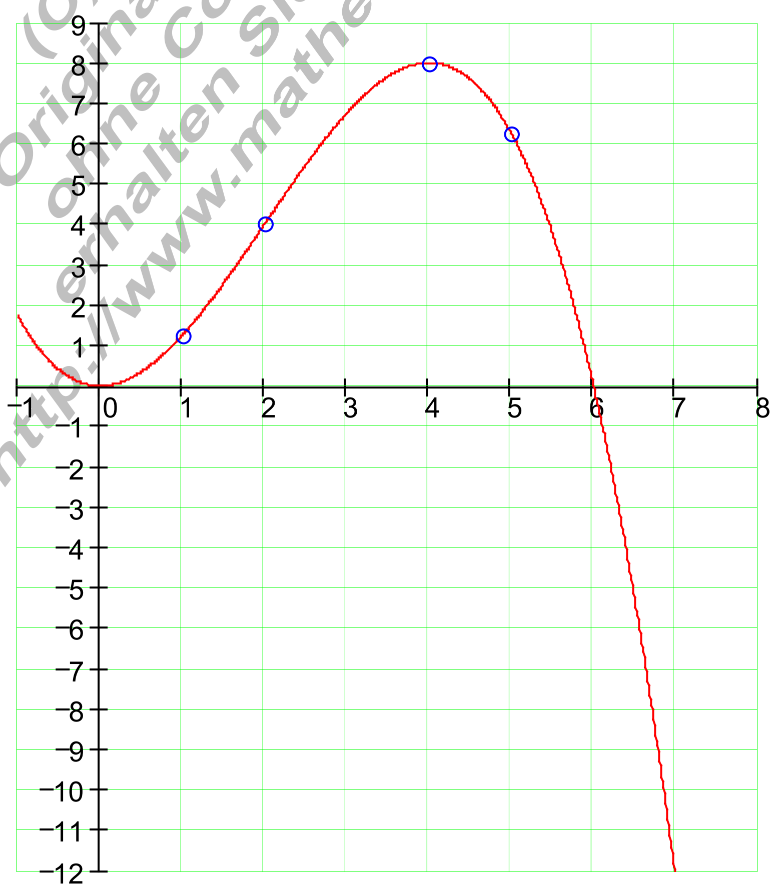
$$E'''(x) = -\frac{3}{2} \Rightarrow E'''(x) = E'''(2) = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_w = 2 \text{ ist Wendestelle}$$

Wegen $P_2(2\mid 4)$ gilt: $P_w(2\mid 4)$

Bei einen Dosiswert von x = 2 ist die Effizienzzunahme der Bestrahlung am größten.

A4 Ausführliche Lösung

c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.



A4	Ausführliche Lösung		
	d)	Welche Schlussfolgerung kann ein Arzt aus diesen Ergebnissen ziehen?	
		$P_1\ (0 \mid 0)$	Wenn keine Bestrahlung erfolgt, ist keine Effizienz zu verzeichnen.
		$P_{Max}\ (4 \mid 8)$	Bei der Dosis x = 4 ist die Effizienz der Bestrahlung am größten. Wird die Dosis erhöht, so sinkt die Effizienz, da verstärkt schädigende Wirkungen auftreten.
		$P_W\ (2 \mid 4)$	Bei einer Dosis von x = 2 ist die Effizienzzunahme am größten. Dort bewirken geringste Dosisverstärkungen eine große Effizienzzunahme.
		$P_4\ (6 \mid 0)$	Bei der Dosis x = 6 ist die Effizienz gleich Null. Die Nutzwirkung wird durch die schädigende Wirkung aufgehoben. Für $x > 6$ sind die schädigenden Strahlenwirkungen größer als der Nutzeffekt.
		Möglicherweise würde der behandelnde Arzt sich für eine Dosis im Bereich $2 < x < 4$ entscheiden. Dabei muss der Arzt sicherlich noch weitere Faktoren, die den Patienten betreffen berücksichtigen.	